

Instituto de Pesquisas Tecnológicas do Estado de São Paulo

Christiane Maria Helena Alletti

**Conceitos Básicos de Estabilidade de Estruturas,
com Referência a Edifícios de Concreto Armado**

**São Paulo
2008**

Christiane Maria Helena Alletti

Conceitos básicos de estabilidade de estruturas, com referência a edifícios
de concreto armado

Dissertação de Mestrado apresentada ao
Instituto de Pesquisas Tecnológicas do Estado
de São de São Paulo – IPT, como parte dos
requisitos para obtenção de título de Mestre em
Habitação: Planejamento e Tecnologia.

Data da aprovação ___/___/___

Prof. Roberto Katumi Nakaguma (Orientador)
IPT – Instituto de Pesquisas Tecnológicas
do Estado de São Paulo

Membros da Banca Examinadora:

Prof. Dr. Roberto Katumi Nakaguma (Orientador)
Mestrado IPT – Instituto de Pesquisas Tecnológicas do Estado de São Paulo

Prof. Dr. Hideki Ishitani
EPUSP – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

Prof. Dr. Takashi Yojo
Instituto de Pesquisas Tecnológicas do Estado de São Paulo

Christiane Maria Helena Alletti

Conceitos básicos de estabilidade de estruturas, com referência a edifícios de concreto armado

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Pesquisas Tecnológicas do Estado de São de São Paulo – IPT, como parte dos requisitos para obtenção de título de Mestre em Habitação: Planejamento e Tecnologia.

Área de Concentração: Tecnologia de Construção de Edifícios - TCE

Orientador: Prof. Roberto Katumi Nakaguma

São Paulo
Março/2008

Ficha Catalográfica
Elaborada pelo Departamento de Acervo e Informação Tecnológica – DAIT
do Instituto de Pesquisas Tecnológicas do Estado de São Paulo - IPT

A434c

Alletti, Christiane Maria Helena

Conceitos básicos de estabilidade de estruturas, com referência a edifícios de concreto armado. / Christiane Maria Helena Alletti. São Paulo, 2008.
71p.

Dissertação (Mestrado em Habitação: Planejamento e Tecnologia) - Instituto de Pesquisas Tecnológicas do Estado de São Paulo. Área de concentração: Tecnologia em Construção de Edifícios.

Orientador: Prof. Roberto Katumi Nakaguma

1. Estabilidade estrutural 2. Compressão axial 3. Compressão excêntrica 4. Flambagem 5. Edifício de concreto armado 6. Tese I. Nakaguma, Roberto Nakaguma, orient. II. IPT. Coordenadoria de Ensino Tecnológico III. Título

14-17

CDU 624.046(043)

AGRADECIMENTOS

A meus pais Fabio e Maria Helena a quem devo grande parte do que sou.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Roberto Katumi Nakaguma, pela oportunidade do tema, conhecimento e desenvolvimento profissional adquiridos.

A minha família e amigos que no decurso desta caminhada contribuíram para o êxito deste trabalho. Citando alguns: Tios João, Angelo e Domingos, Rita de Cássia Monteiro Pires, Daniela da Costa, Andrea Longuinho, Mary Toledo, Eric Cunha e Leonardo Meligeni.

RESUMO

O conteúdo do capítulo 15 da NBR 6118 (2003), que trata de instabilidade de estruturas reticuladas – tópico de suma importância –, pode melhor ser apreendido a partir de conceitos teóricos básicos, como, momentos fletores externo e interno, suas variações com a curvatura, efeitos de segunda ordem, bem como o conceito de instabilidade propriamente, incluindo tipos e condições em que ocorrem, considerando materiais lineares ou não lineares, equação simplificada ou completa da curvatura, etc.

Neste contexto, fica clara a diferenciação entre o ELU de resistência e o ELU de instabilidade. Ou seja, é possível verificar, obedecidas as condições de equilíbrio para determinado nível de carregamento, se o equilíbrio é estável ou instável. Se estável, o problema se resumirá na análise quanto ao ELU associado ao esgotamento de resistência da seção da estrutura analisada. Caso contrário, se o equilíbrio for instável, situação em que um pequeno acréscimo de carregamento implica em enormes deslocamentos, ficando configurado o ELU de instabilidade, mesmo que a estrutura apresente suficiência quanto a esforços internos resistentes.

Observe-se que, como descrito neste trabalho, para pilares de concreto armado, submetido a carregamento excêntrico, como acontece na prática, a ocorrência de flambagem ou bifurcação de equilíbrio está descartada. Nesse caso, a instabilidade a ser pesquisada é do tipo “ponto limite”, devendo-se considerar necessariamente teoria de segunda ordem e material não linear.

Esta dissertação aborda a análise de conceitos básicos da teoria de estabilidade de estruturas reticuladas —considerando materiais de comportamento elástico linear e não linear—, acompanhada de exemplos referentes a pilares de edifícios.

Faz também breve referência, apenas para relacionar a teoria apresentada com simplificações empregadas na prática de projeto de edifícios, como o uso do parâmetro γ_z , linearização da rigidez em análise global de estabilidade de estruturas, método do pilar padrão para pilar isolado ou para análise de estabilidade local.

Palavras-chave: Estrutura; Edifícios; Pilares; Não linearidade física; Não linearidade geométrica; Efeitos de 2ª ordem; Estabilidade; Flambagem; Ponto de bifurcação; Ponto limite.

ABSTRACT

The content of the chapter 15 of the NBR 6118 (2003), dealing with instability of linear structures – topic of primary importance –, may be rather better understood from the theoretical basic concepts, such as external and internal bending moments, their variations with the curvature, second order effects and the instability concept as well, including the types and conditions for their occurrences, considering linear or nonlinear materials, simplified or complete curvature equation, etc.

In this context, it should be clear the differentiation between the resistance ULS and instability ULS. That is, it should be possible to verify, the equilibrium equations being satisfied for a determined load level, if the equilibrium is stable or unstable. If stable, the problem is reduced to the resistance ULS analysis. On the contrary, if the equilibrium is unstable, situation in which a small increment of load imply in great displacements, characterizing the instability ULS, even though the structure may present sufficient internal resistance.

Observe that, as described in this work, for reinforced concrete columns under a non axial load—as in real cases—, the occurrence of buckling or equilibrium bifurcation is discarded. In this case, the instability to be searched is that of the type “limit point”, being necessary to consider second order theory and nonlinear material.

This work emphasizes the presentation of basic concepts for the instability analysis of linear structures—considering linear elastic and non linear materials—, with examples relative to building columns.

As referred to reinforced concrete structure buildings, it will be briefly mentioned the practical simplifications, such as the use of the γ_z parameter, the stiffness linearization in global stability analysis, model column method for isolated columns or for local stability analysis.

Key Words: Structure; Buildings; Columns; Physical non linearity; Geometrical non linearity; 2nd order effects; Stability; Buckling; Bifurcation point; Limit point.

Lista de Ilustrações

Figura 1	Pilar em balanço – Compressão excêntrica.....	19
Figura 2	Estabilidade de equilíbrio de corpo rígido	22
Figura 3	Pilar em balanço – Compressão axial.....	24
Figura 4	Curvas Carga x Flecha Pilar em balanço – Regime elástico linear	27
Figura 5	Estruturas abatidas Instabilidade com inversão de configuração geométrica	30
Figura 6	Curvas Carga x Flecha Pilar em balanço – Regime não linear	33
Figura 7	Estabilidade de equilíbrio. Regime linear – Compressão axial Equação simplificada da curvatura.	39
Figura 8	Estabilidade de equilíbrio. Regime linear – Compressão axial Equação completa da curvatura.....	40
Figura 9	Estabilidade de equilíbrio. Regime linear – Compressão excêntrica Equação simplificada da curvatura	41
Figura 10	Estabilidade de equilíbrio. Regime linear – Compressão excêntrica Equação completa da curvatura.....	42
Figura 11	Estabilidade de equilíbrio. Regime não linear – Compressão axial Equação completa da curvatura.....	43
Figura 12	Estabilidade de equilíbrio. Regime não linear – Compressão excêntrica Momento externo linearizado	44
Figura 13	Identificação de instabilidade por ponto limite (Método geral).....	51
Figura 14	ELU de resistência do material e de instabilidade	57
Figura 15	Instabilidade de pilar de concreto armado Método do pilar padrão – Momento de 1ª ordem crítico	64

Lista de Tabelas

Tabela 1	Resumo dos casos de instabilidade analisados	47
Tabela 2	Etapas da aplicação do método geral para análise de 2 ^a ordem	50
Tabela 3	Resumo dos casos de análise de efeitos globais em estruturas de edifício ..	61

Lista de Símbolos

a – flecha do arco em sua geometria original

a_1 – flecha do arco em sua geometria deformada

A – área da seção transversal

A_s – área da seção transversal da armadura longitudinal de tração

A'_s – área da seção transversal da armadura longitudinal de compressão

e – excentricidade do carregamento

e_1 – excentricidade de 1ª ordem do carregamento

E – módulo de elasticidade do material

E_{ci} – módulo de elasticidade tangente inicial ($E_{ci} = 5600 f_{ck}^{1/2}$)

EI – rigidez à flexão

$(EI)_{sec}$ – rigidez à flexão secante

ELS – estado limite de serviço

ELU – estado limite último (*ULS – ultimate limit strength*)

f – flecha

F – força

f_{ck} – resistência do concreto à compressão

H – reação horizontal de apoio de arco (empuxo)

i – raio de giração

I – momento de inércia

I_c – momento de inércia da seção bruta de concreto

k – constante, $k = \frac{L_e^2}{\pi^2} \cong \frac{L_e^2}{10}$ (equações 30, 35, 56)

\mathbf{K}_t – matriz de rigidez tangente

\mathbf{K}_0 – matriz de rigidez convencional (usual ou clássica)

$\Delta\mathbf{K}_0$ – matriz de rigidez associada à alteração das coordenadas nodais

\mathbf{K}_g – matriz de rigidez geométrica associada ao nível de sollicitação normal das barras

l – corda de arco (Figura 5.b)

L – comprimento de viga

L_e – comprimento de flambagem

LF – linearidade física

LG – linearidade geométrica

m – adimensional, $m = \frac{4I}{Aa^2}$ (equação 24; Figura 5c)

M – momento fletor

$M_{1,tot,d}$ – momento total de tombamento de projeto (1ª ordem)

M_i – momento fletor interno

M_e – momento fletor externo

N – força normal

NL – não linear

NLG – não linearidade geométrica

NLF – não linearidade física

P – carga

P_{cr} – carga crítica

P_L – carga limite

PL – ponto limite

q – carga distribuída

$1/r$ – curvatura

u – carregamento adimensional, $u = \frac{5ql^4}{384EIa}$ (equação 23; Figura 5c)

x – abcissa, segundo o eixo da barra (pilar)

\mathbf{x} – vetor deslocamento nodal

y – deslocamento lateral

δ – flecha na extremidade livre do pilar engastado

Δ – incremento

$\Delta M_{tot,d}$ – incremento do momento total de projeto

ΔP – incremento de carga

$\Delta \mathbf{P}$ – vetor de incremento de esforços nodais

$\Delta \mathbf{M}$ – vetor de incremento de momento fletor

$\Delta \mathbf{x}$ – vetor de incremento de deslocamentos nodais

ε – deformação específica

κ – constante, $\kappa = \frac{\pi}{L_e}$ (equação 21); $\kappa^2 = 1 / k^2$

λ – índice de esbeltez, $\lambda = \ell_e / i$

α, γ_z – parâmetros de avaliação de efeitos globais de 2ª ordem

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	12
1.1 Objetivo do trabalho	14
1.2 Desenvolvimento do trabalho	15
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	16
3 CONCEITOS BÁSICOS PARA ANÁLISE DE ESTABILIDADE ESTRUTURAL	18
3.1 Curvatura de uma linha	18
3.2 Momento externo (1ª e 2ª ordem)	19
3.3 Momento interno (linear e não linear)	20
3.4 Estabilidade de sistemas mecânicos	21
4 ESTABILIDADE DE ESTRUTURAS	23
4.1 Instabilidade no regime elástico linear	23
4.1.1 Compressão axial – Instabilidade por bifurcação de equilíbrio	23
4.1.1.a Flambagem – Equação simplificada da curvatura	23
4.1.1.b Flambagem – Equação exata da curvatura	28
4.1.2 Compressão excêntrica – Efeitos de 2ª ordem	28
4.1.3 Instabilidade por inversão de configuração geométrica	29
4.2 Instabilidade no regime não linear	32
4.2.1 Compressão axial – Instabilidade por bifurcação de equilíbrio	32
4.2.2 Compressão excêntrica – Instabilidade por ponto limite	34
4.2.3 Instabilidade por inversão de configuração geométrica	35
4.3 Linearização do momento externo	35
4.3.1a Uso da equação simplificada da curvatura	36
4.3.1b Uso da equação completa da curvatura	36
4.4 Verificação da estabilidade das configurações de equilíbrio	37
4.5 Resumo dos casos de instabilidade	47
5 ANÁLISE DE 2ª ORDEM E DE ESTABILIDADE – REGIME ELÁSTICO LINEAR	48
5.1 Análise não linear geométrica	48
5.1.1 Método geral para material linear e análise não linear geométrica	48
5.1.2 Formulação matricial para análise não linear geométrica	51
5.2 Análise de estabilidade sob compressão axial	53
5.3 Análise de 2ª ordem sob compressão excêntrica	54
5.4 Análise de estabilidade de estrutura abatida	54
6 ANÁLISE DE 2ª ORDEM E DE ESTABILIDADE – REGIME NÃO LINEAR	55
6.1 Método geral para análise não linear geométrica e material não linear	55
6.2 Identificação de instabilidade por ponto limite	56
6.3 Análise global de edifícios de concreto armado	58
6.3.1 Mobilidade de estruturas (nós fixos ou móveis)	58
6.3.2 Avaliação da mobilidade de estruturas através de processos simplificados	58
6.3.3 Análise global de estruturas de nós móveis	59
6.3.4 Resumo dos casos de análise global	60
6.4 Análise de pilares isolados. Método do pilar padrão	61

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS E CONCLUSÕES.....	66
REFERÊNCIAS	69

1 INTRODUÇÃO

Em projeto de estruturas de edifícios de concreto armado há necessidade de observar valores limites para as respostas em deslocamento. Neste sentido, o item 13.3 (“Deslocamentos limites”) da NBR 6118 (2003) recomenda a verificação em serviço de deslocamentos, quanto ao estado limite de deformações excessivas da estrutura, os quais a partir de certa magnitude podem causar problemas para o uso normal da edificação.

Os efeitos dos deslocamentos são classificados pela norma nos grupos abaixo relacionados:

- (i) Aceitação sensorial de deslocamentos visíveis em elementos estruturais.
- (ii) Percepção sensorial de vibrações.
- (iii) Utilização adequada da construção conforme a finalidade para a qual foi projetada.
- (iv) Efeitos em elementos não estruturais.
- (v) Efeitos em elementos estruturais, devendo-se observar, conforme citação da NBR 6118 (2003), que *“os deslocamentos podem afetar o comportamento do elemento estrutural, provocando afastamento em relação às hipóteses de cálculo adotadas. Se os deslocamentos forem relevantes para o elemento considerado, seus efeitos sobre as tensões ou sobre a estabilidade da estrutura devem ser considerados, incorporando-os ao modelo estrutural adotado”*.

Para atendimento da norma, os deslocamentos relacionados aos itens (i) a (iv) acima devem ser inferiores a certos valores práticos admissíveis (conforme a Tabela 12.3 da norma, “Limites para deslocamentos”), que dependem dos efeitos causados na estrutura ou na construção, para evitar atingir os Estados Limites de Serviço quanto a deformações excessivas (ELS-DEF) e a vibrações excessivas (ELS-VE).

Em projeto de estruturas esbeltas, particularmente de edifícios com elementos de maior flexibilidade (com pilares ou viga de reduzida rigidez à flexão; concreto de baixo módulo de elasticidade; contraventamento reduzido pela substituição de paredes de vedação de alvenaria por painéis de menor rigidez, tipo drywall, por exemplo, etc.), são particularmente importantes os deslocamentos

laterais, causados por carregamentos horizontais, principalmente devidos à ação do vento. Essas ações podem ocasionar alguns dos efeitos acima descritos, relativos a danos estruturais e não estruturais e a vibrações.

Além disso, note-se que sob essas ações os efeitos estruturais são majorados, pois, sob incremento de deslocamento lateral as cargas verticais (gravitacionais) geram correspondentemente incremento de esforços, principalmente de momento fletor, ou seja, o comportamento da estrutura é afetado pela própria resposta em termos de deslocamentos laterais. Também, o acréscimo de momento referido é acompanhado por novo acréscimo de deslocamento, repetindo-se o ciclo em seqüência, o que torna o processo iterativo, não linear. Os efeitos resultantes são denominados de 2ª ordem, os quais podem ser significativos ou não. No processo pode haver convergência para uma configuração de equilíbrio estável, ou não estável — nesse caso configurando uma situação de instabilidade estrutural.

A análise de 2ª ordem (não linear geométrica) somente pode ser feita verificando-se o equilíbrio da estrutura na configuração deformada, em contraposição à análise de 1ª ordem (linear geométrica), onde o equilíbrio é estabelecido apenas na configuração inicial, não deformada da estrutura.

Se as respostas estruturais de 2ª ordem forem significativas em relação às respostas de 1ª ordem, então a análise linear usualmente realizada se afasta muito do comportamento real e pode não ser suficiente para garantir a segurança da obra. Daí a recomendação da norma, item (v) acima, de se incorporar ao modelo de análise a influência dos deslocamentos sobre as tensões ou sobre a condição de estabilidade da estrutura. Desta forma, os efeitos descritos neste item, estão relacionados ao ELS e também ao ELU já que possibilitam desencadear ruptura do material ou instabilidade da estrutura.

Assim, por meio da análise de 2ª ordem, é possível fazer adequadamente verificações quanto ao ELS e também quanto ao esgotamento da capacidade resistente de peças estruturais (ELU de resistência) e à ocorrência de instabilidade estrutural (ELU de instabilidade), estado em que um acréscimo pequeno do carregamento implica em grandes deslocamentos, ou mesmo em impossibilidade de equilíbrio da estrutura.

Esta dissertação é focada principalmente em conceitos básicos para a análise de 2ª ordem e de estabilidade de estruturas de modo geral, construídas com material

de comportamento elástico linear e não linear, por exemplo, aço e concreto armado, respectivamente.

Breve referência é feita, com relação a possíveis simplificações práticas em projeto de estruturas de edifícios de concreto armado, como critérios para a verificação da relevância dos efeitos de 2ª ordem (parâmetro γ_z), linearização da rigidez em análise de estabilidade global, método do pilar padrão para pilar isolado ou para análise local.

Para melhor apreensão dos conceitos envolvidos e por simplicidade, os exemplos e aplicações apresentados são referidos a uma barra engastada em uma extremidade e livre na outra, que pode corresponder a modelo de pilar de edifício.

Embora os fundamentos da teoria de estabilidade estrutural sejam bastante difundidos, a abordagem apresentada parece ser oportuna, pois possibilita ampliar discussões sobre os conceitos de estabilidade de estruturas referidos pela norma NBR 6118 (2003).

1.1 Objetivo do trabalho

O objetivo deste trabalho é apresentar os fundamentos teóricos sobre estabilidade estrutural para materiais em regime elástico linear e não linear, sob carregamento de compressão axial e excêntrica, abordando os casos clássicos de perda de estabilidade por bifurcação de equilíbrio (flambagem) e de surgimento de ponto limite com e sem inversão de configuração geométrica, citados também pela NBR 6118 (2003), no item 15.2 (“Campo de aplicação e conceitos fundamentais”) do capítulo 15 (“Instabilidade e efeitos de 2ª ordem”).

O caso de compressão axial é apresentado como referência e para melhor compreensão da teoria de instabilidade estrutural e sua evolução no tempo, devendo-se notar, contudo, que para estruturas reais de concreto armado sempre há excentricidade das cargas de compressão, ainda que relativas a imperfeições geométricas.

Todo desenvolvimento do trabalho apresentado tem como base a extensa bibliografia existente.

1.2 Desenvolvimento do trabalho

No capítulo 2 é feita uma revisão bibliográfica geral sobre estabilidade de estruturas, restringindo-se aos assuntos tratados nesta dissertação.

No capítulo 3 estão descritos alguns conceitos básicos necessários ao desenvolvimento proposto: curvatura de uma linha, momentos externo e interno e estabilidade de sistemas mecânicos de corpos rígidos.

No capítulo 4 conceituam-se os diversos tipos de instabilidade de estruturas, levando-se em conta materiais elásticos lineares e não lineares.

O capítulo 5 apresenta análise de 2ª ordem e de estabilidade de estruturas de material elástico linear, mencionando-se as possibilidades de tratamento através de métodos matriciais.

O capítulo 6 apresenta análise de 2ª ordem e de estabilidade de estruturas material não linear. Faz-se referências a efeitos globais e locais de estruturas de edifícios de concreto armado, considerando-se as recomendações da NBR 6118 (2003).

No capítulo 7 estão as considerações finais e conclusões do trabalho.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O fenômeno da flambagem foi estudado analiticamente, em primeiro lugar, por Euler em 1744 [apud TIMOSHENKO (1960, 1961)], considerando um “pilar ideal”, ou seja uma barra perfeitamente reta, engastada em uma extremidade e livre na outra, e sujeita a compressão axial. O material da barra foi suposto perfeitamente elástico linear, com tensões atuantes inferiores ao limite de proporcionalidade. As equações de equilíbrio foram estabelecidas na configuração deformada e considerou-se a equação simplificada da curvatura da barra em flexão. Sob as hipóteses descritas, foram obtidas infinitas cargas críticas de flambagem, observando-se que apenas a menor delas tem interesse prático. Contudo, para cada carga crítica verificou-se indeterminação do eixo deformado da barra, portanto, com indicações de que o equilíbrio encontrado é do tipo indiferente, ou seja, há infinitos campos de deslocamento que obedecem as condições geométricas de contorno da barra e as equações de equilíbrio estabelecidas.

Posteriormente, o próprio Euler, considerando a mesma estrutura e adotando a equação exata da curvatura da barra, levantou a indeterminação dos deslocamentos acima referida, ou seja, determinou campos de deslocamento como função das cargas aplicadas, quando maiores que a carga crítica considerada.

Soluções para a mesma barra reta, linear elástica e submetida à compressão axial, considerando diversas condições de contorno geométricas, foram determinadas posteriormente [TIMOSHENKO (1961)].

Note-se que nos estudos pioneiros de Euler estava implícita a noção de efeitos de 2ª ordem, já que a equação de equilíbrio da estrutura foi referida à sua posição deformada.

Inúmeros desenvolvimentos teóricos e ensaios experimentais (que comprovaram a teoria de Euler) e extensões para a análise de estruturas reticuladas mais complexas, com a consideração de materiais elásticos lineares e não lineares (principalmente elasto-plástico), sob compressão axial e excêntrica, foram realizados ainda no século XIX e no início do século XX por pesquisadores renomados como Lagrange, Von Kármán, Von Mises, Mohr, Tetmajer [conforme extensa bibliografia apresentada em TIMOSHENKO (1960, 1961)], RATZERDORSFER (1954, 1955) e ZIEGLER (1968). Ratzerdorfer, pesquisador de origem austríaca, trabalhou com o

assunto flambagem no antigo Agrupamento de Estruturas do IPT, na década de 1950.

Para análises de 2ª ordem foram estabelecidas técnicas iterativas, já que o problema é não linear geometricamente, como o método geral, o método P- Δ . [CEB (1978, 1993), FUSCO (1981)], que foram aplicadas inicialmente a estruturas simples, com resolução “manual”.

Com o uso disseminado de computadores digitais, que possibilitou a introdução de análises matriciais numéricas, principalmente o Método dos Elementos Finitos, ocorreu enorme avanço no campo de análise estrutural de forma geral [ZIENCKIEWICZ (1971), CLOUGH (1975), GALLAGHER (1975), etc.]. Assim, foi possível superar as restrições e dificuldades impostas pelas soluções analíticas, possibilitando a abordagem de vários tipos de estruturas — além de reticulada, estruturas bi e tri-dimensional, como placas, cascas, sólidos de revolução, etc. —, considerando-se materiais lineares e não lineares.

Assim, com estes recursos numéricos, foi possível analisar em estruturas complexas, problemas estáticos e dinâmicos e de instabilidade.

Inúmeros programas de cálculo estrutural foram desenvolvidos ao longo dos últimos 40 anos, desde o início do estabelecimento do Método dos Elementos Finitos, e estão disponíveis comercialmente.

Também, foram desenvolvidos inúmeros trabalhos voltados para análise estrutural de edifícios de concreto armado, considerando efeitos de 2ª ordem [FUSCO (1981), FRANÇA (1991), MACGREGOR (1993), PINTO (1997, 2002), OLIVEIRA (2004), etc.], bem como simplificações extremamente úteis na prática, estabelecendo limites para verificação da possibilidade de dispensa ou não do uso de análise de 2ª ordem através dos denominados coeficientes α [KÖNIG (1966), BECK E KÖNIG (1967, 1968), apud VASCONCELLOS (1997)] e γ_z [FRANCO (1985, 1995), VASCONCELLOS (1997), FRANCO e VASCONCELLOS (1991), NBR 6118 (2003)].

3 CONCEITOS BÁSICOS PARA ANÁLISE DE INSTABILIDADE ESTRUTURAL

Neste item são revistas algumas definições de grandezas e conceitos básicos que serão utilizados no trabalho, relativos a:

- Curvatura
- Momento externo e momento interno
- Estabilidade de sistema mecânico

3.1 Curvatura de uma linha

Da Geometria Analítica sabe-se que a curvatura de um ponto de uma linha $y = y(x)$, expressa em coordenadas cartesianas, é definida como o inverso do raio de curvatura $r(x)$ do ponto, ou seja,

$$\frac{1}{r(x)} = \frac{\frac{d^2 y(x)}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy(x)}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} \quad (1)$$

No caso de pequenas curvaturas, sendo $(dy/dx)^2$ desprezível em relação à unidade, a curvatura pode ser reduzida à

$$\frac{1}{r(x)} = \frac{d^2 y(x)}{dx^2} \quad (2)$$

Na teoria de flexão de vigas, $y = y(x)$ corresponde à curva do eixo deformado da viga (deslocamento transversal). Note-se que enquanto o deslocamento é função apenas da abcissa x , a curvatura, por conter derivadas de $y(x)$, depende do andamento da curva no entorno do ponto, ou seja, a noção de curvatura abrange a condição necessária da análise estrutural em termos de compatibilidade do campo de deslocamento.

É possível mostrar que a curvatura $1/r(x)$ para determinado ponto da estrutura, no caso de teoria restrita a pequenos deslocamentos, equivale à tangente do ângulo entre a seção transversal inicial, na posição indeformada, e a seção transversal deformada (plana pela Hipótese de Navier) [FUSCO (1981)].

3.2 Momento externo (1ª e 2ª ordem)

Considerando o pilar em balanço da Figura 1.a na posição inicial indeformada (análise de 1ª ordem) submetido à compressão excêntrica, o momento externo em qualquer seção é constante, dado por

$$M_e(x) = Pe \quad (3)$$

onde P é a carga aplicada e e , a excentricidade.

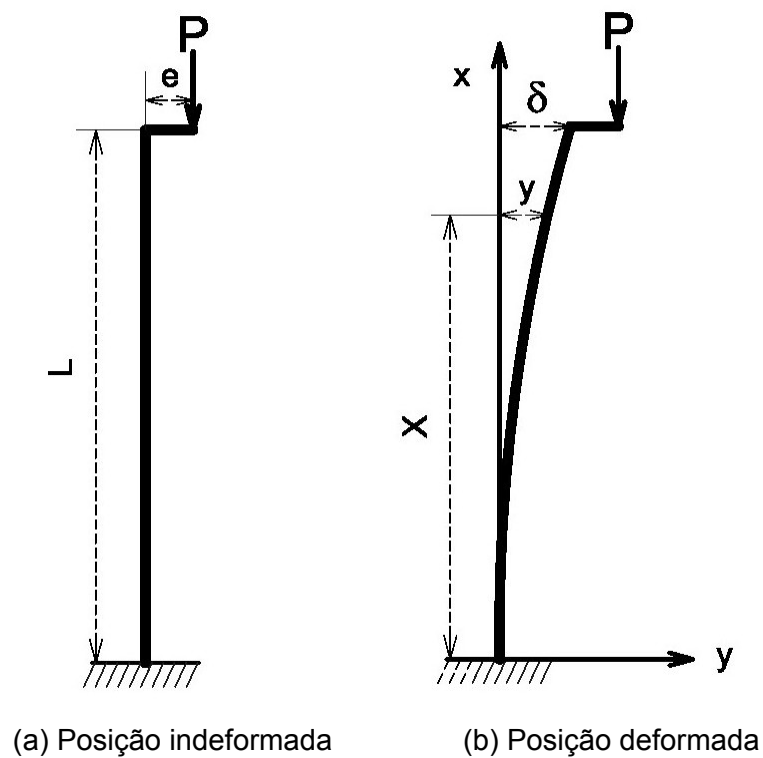


Figura 1

Pilar em balanço – Compressão excêntrica

No caso de se considerar o equilíbrio da mesma barra na configuração deformada (análise de 2ª ordem), o momento externo é

$$M_e(x) = P[e + \delta - y(x)] = Pe + P[\delta - y(x)] \quad (4)$$

onde δ é a flecha na extremidade livre e $y(x)$ o deslocamento transversal relativo à seção x considerada na situação de equilíbrio final, conforme indicado na Figura 1.b.

Para o caso de pequenos deslocamentos, pode-se desprezar o termo $[\delta - y(x)]$ na equação 4 e considerar, desta maneira, que o momento fletor M_e seja dado apenas por Pe , recaindo-se na equação 3, referente à posição indeformada. A parcela remanescente é o denominado momento de 1ª ordem M_1 , ou seja,

$$M_1(x) = Pe \quad (5)$$

Se os deslocamentos não forem desprezíveis, M_e deve ser expresso pela equação 4, onde o acréscimo de momento em relação à M_1 , $P[\delta - y(x)]$, é o denominado momento de 2ª ordem M_2

$$M_2(x) = P[\delta - y(x)] \quad (6)$$

correspondente ao efeito dos deslocamentos na ação do carregamento. Assim, o momento externo total é composto pelo momento de 1ª ordem (M_1) e pelo momento de 2ª ordem (M_2)

$$M_e(x) = M_1 + M_2(x) = Pe + P[\delta - y(x)] \quad (7)$$

Em resumo, quando os deslocamentos ocorridos alteram de modo significativo a locação das cargas aplicadas, há acréscimo considerável do momento em relação à M_1 . Nesse caso, as equações de equilíbrio devem ser referidas à geometria deformada da estrutura e o momento externo $M_e(x)$ é função da carga P e do deslocamento $y(x)$, notando-se que o fato da posição deformada não ser conhecida *a priori* torna o momento $M_e(x)$ da equação 7 não linear.

Especificando a equação 7 para a base do pilar ($x=0$), onde o momento é máximo, tem-se

$$M_e = P(e + \delta) \quad (8)$$

3.3 Momento interno (linear e não linear)

Em uma barra submetida à flexão, a cada configuração fletida da linha elástica corresponde uma distribuição de momentos fletores internos desenvolvida pela barra em resposta aos momentos externos aplicados pelo carregamento, de modo a se ter em cada seção, se o equilíbrio for possível, a igualdade entre os momentos interno e externo.

Da teoria de flexão de vigas, considerando comportamento elástico linear do material, sabe-se que em uma seção x da barra atua o momento interno, função linear da curvatura,

$$M_i(x) = EI \frac{1}{r(x)} \quad (9)$$

onde E é o módulo de elasticidade do material e I o momento de inércia da seção transversal. Observe-se que EI (rigidez à flexão da barra) é o coeficiente angular da reta que representa a relação $M_i(x) \times 1/r(x)$.

Para comportamento não linear do material, a relação entre o momento interno e a curvatura é do tipo

$$M_i(x) = f[1/r(x)] \quad (10)$$

sendo f função não linear.

Para barras de concreto armado, foram desenvolvidos vários métodos para a determinação numérica da relação momento interno \times curvatura, mantendo-se a força normal constante [FUSCO (1981), COLLINS (1987)].

Como será descrito posteriormente, para determinado nível de carregamento, caso a barra esteja em equilíbrio, há igualdade entre os momentos externo e interno, ou seja, $M_e(x) = M_i(x)$, restando ainda verificar se o equilíbrio é estável ou instável.

3.4 Estabilidade de sistemas mecânicos

É usual, para visualização intuitiva do conceito de estabilidade e instabilidade do equilíbrio de uma estrutura, recorrer-se à analogia a sistema mecânico como o ilustrado na Figura 2. Nessa figura, uma esfera rígida, sujeito a campo gravitacional, tem equilíbrio estável na posição A , pois após sofrer pequena perturbação cinemática tenderá a retornar à posição inicial. O mesmo não acontece nas posições B , C e D , pois neste caso tenderá a se afastar da posição inicial, após perturbação, sendo o equilíbrio nessas posições dito instável. Por outro lado, em qualquer posição do segmento de reta EF , considerando que a perturbação cinemática consista apenas de alteração de posição, por imposição de deslocamento sem velocidade inicial, o corpo permanecerá na posição deslocada em equilíbrio indiferente.

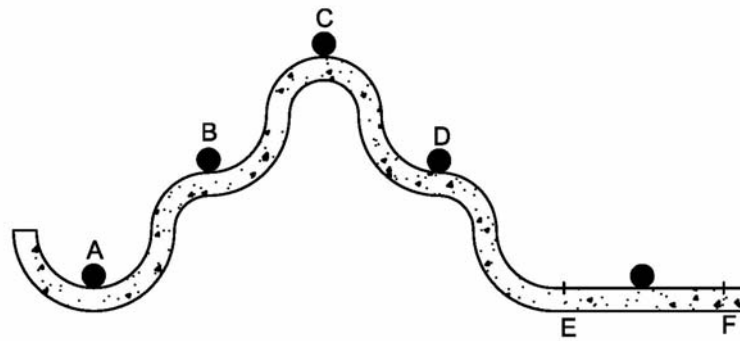


Figura 2

Estabilidade de equilíbrio de corpo rígido

Esta analogia é introduzida apenas para se ter uma visão intuitiva do fenômeno da estabilidade, notando-se que, para o caso de estruturas deformáveis, serão apresentados procedimentos formais adequados para a verificação da estabilidade do equilíbrio no item 4.4.

4 ESTABILIDADE DE ESTRUTURAS

Neste capítulo, serão apresentados os casos de instabilidade de estruturas, referentes a materiais elásticos lineares e não lineares, associados à ocorrência de ponto de bifurcação de equilíbrio (ou flambagem) e de ponto limite sem e com inversão de configuração geométrica.

Observe-se que para o estudo de estabilidade de estruturas, é necessária a consideração de efeitos de 2ª ordem, ou seja, equacionamento do equilíbrio da estrutura na posição deformada, como fez Euler no estudo sobre flambagem de barras comprimidas axialmente, descrito no item seguinte.

4.1 Instabilidade no regime elástico linear

Para estruturas com material comportando-se em regime elástico linear —com tensões inferiores ao limite de proporcionalidade—, discute-se a seguir a possibilidade de ocorrência de casos de instabilidade de estruturas relativas ao aparecimento de bifurcação de equilíbrio e de ponto limite sem e com inversão de configuração geométrica.

4.1.1 Compressão axial – Instabilidade por bifurcação de equilíbrio

O fenômeno de bifurcação de equilíbrio, como se verá nos itens seguintes, consiste no aparecimento de duas configurações de equilíbrio possíveis, ao atingir determinado nível de carga de compressão (carga crítica).

Note-se que bifurcação de equilíbrio constitui-se em critério para a identificação de ocorrência de instabilidade de estruturas por flambagem.

4.1.1.a Flambagem – Equação simplificada da curvatura

A identificação do fenômeno de bifurcação de equilíbrio decorre da análise de uma barra ideal, inicialmente reta e sem imperfeições, engastada em uma extremidade e submetida à compressão axial (pilar em balanço), cujos resultados,

apresentados por Euler em 1744 [apud TIMOSHENKO (1960,1961)], são reproduzidos a seguir.

Na Figura 3 está mostrado o pilar, com comprimento total L , nas posições indeformada (a) e deformada (b), e os eixos cartesianos adotados (x,y) , sendo x coincidente com o eixo do pilar e y referente ao deslocamento transversal.

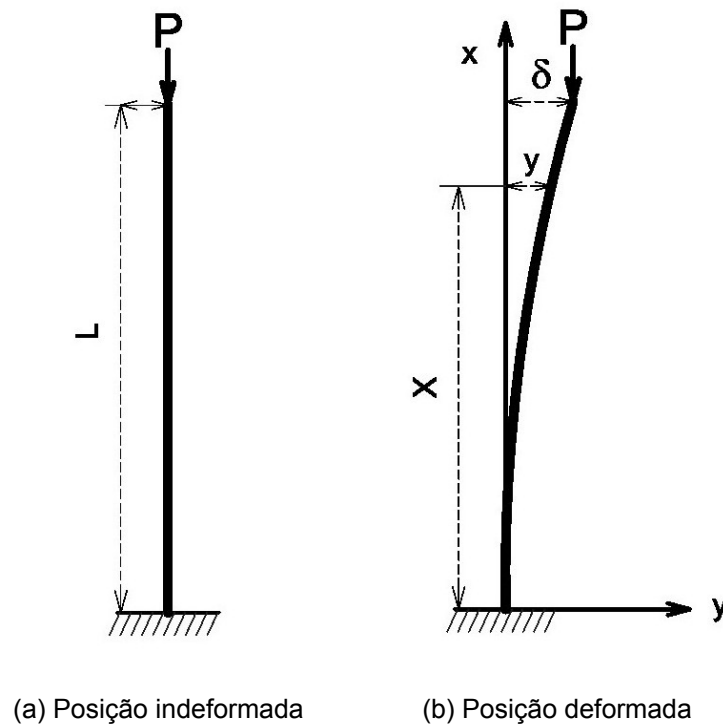


Figura 3

Pilar em balanço – Compressão axial

De maneira diferente do que é feito na teoria da elasticidade linear, onde as equações de equilíbrio são escritas na posição indeformada da barra, estabelece-se a equação diferencial de equilíbrio na posição deformada, portanto com a consideração de efeitos de 2ª ordem. Note-se que este é o ponto básico para tratamento de problemas de estabilidade: permitir a pesquisa de outras configurações possíveis de equilíbrio, diferente da inicial não deformada. O equacionamento proposto não impõe a priori a existência de outras configurações de equilíbrio além da inicial, mas permite que, caso existam, sejam identificadas pela análise matemática.

Assim, considera-se que em uma seção genérica de abcissa x , o deslocamento seja y , que poderá ser nulo ou não. O momento fletor externo nesta posição, seguindo a equação 4 (com a excentricidade $e = 0$), é dado por

$$M_e(x) = P[\delta - y(x)] \quad (11)$$

onde δ é a flecha na extremidade livre da barra (na Figura 3.b).

A relação entre a curvatura e o momento interno, conforme a equação 9, é expressa por

$$\frac{1}{r(x)} = \frac{M_i(x)}{EI} \quad (12)$$

Assumindo-se a expressão simplificada da curvatura (equação 2), válida para pequenos deslocamentos e deformações,

$$\frac{1}{r(x)} = \frac{d^2 y(x)}{dx^2} = \frac{M_i(x)}{EI} \quad (13)$$

Considerando-se que a análise busca configurações de equilíbrio, ou seja, $M_i(x) = M_e(x)$, tem-se

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = P[\delta - y(x)] \quad (14)$$

Com a notação

$$\kappa^2 = \frac{P}{EI} \quad (15)$$

pode-se escrever

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} + \kappa^2 y(x) = \kappa^2 \delta \quad (16)$$

cuja solução geral é

$$y(x) = A \cos \kappa x + B \sin \kappa x + \delta \quad (17)$$

Com o uso das condições de contorno na extremidade engastada [$x=0$, $y(0)=0$ e $\frac{dy}{dx}(0) = 0$], tem-se $A = -\delta$ e $B = 0$, portanto,

$$y(x) = \delta(1 - \cos \kappa x) \quad (18)$$

A condição de contorno na extremidade livre, $y = \delta$ para $x = L$, leva a

$$\delta \cos \kappa L = 0 \quad (19)$$

portanto, há duas possibilidades para que a equação 19 seja satisfeita:

- $\delta = 0$ (solução trivial), nesse caso o deslocamento $y(x) = 0$.
- $\cos \kappa L = 0$, portanto

$$\kappa L = (2n - 1)\pi / 2, \text{ para } n = 1, 2, 3, \dots \quad (20)$$

Esta equação determina os valores de n em que ocorre flambagem, que corresponde ao aparecimento de bifurcação de equilíbrio, ou seja, duas possibilidades de equilíbrio, estável e instável, associadas a configurações geométricas próximas. Observe-se que nas condições de flambagem o valor do deslocamento δ permanece indeterminado, podendo assumir qualquer valor dentro da hipótese adotada de teoria de pequenos deslocamentos, embora a forma do campo dos deslocamentos seja conhecida (senoidal, pela equação 18). Portanto, nas cargas críticas o equilíbrio resultante é do tipo “indiferente”.

O menor valor de κL que satisfaz a equação 20 é obtido tomando-se $n = 1$, obtendo-se

$$\kappa L = L[P/(EI)]^{1/2} = \pi / 2 \Rightarrow \kappa = \frac{\pi}{L_e} \quad (21)$$

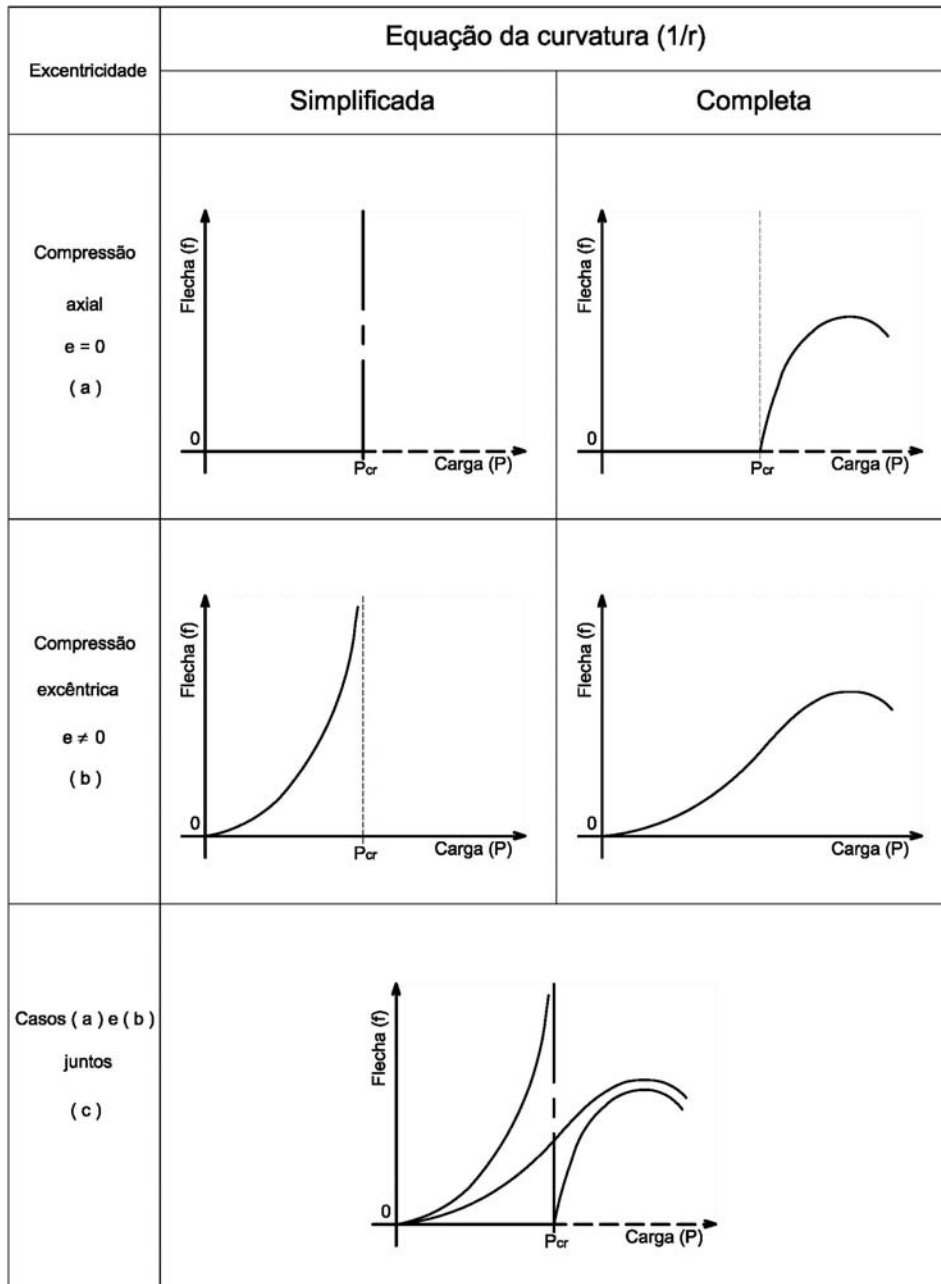
onde foi definido $L_e = 2L$, comprimento de flambagem.

Portanto, da equação (15) determina-se a carga crítica, na qual ocorre a bifurcação de equilíbrio,

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2} \quad (22)$$

Desta forma, se a carga aplicada for menor que a carga crítica, a barra permanece na sua posição original (reta), ocorrendo apenas compressão axial, em equilíbrio estável, o que significa que se uma força lateral for aplicada, produzindo um pequeno deslocamento, quando esta carga for removida o deslocamento desaparece retornando a barra à sua posição inicial. Se a carga P for aumentada gradualmente, chega-se a uma condição em que a forma reta de equilíbrio passa a ser instável, significando que uma pequena força lateral aplicada produzirá um deslocamento que não desaparece quando esta força for removida. A condição de transição da configuração reta de equilíbrio estável para instável define a carga crítica, ou carga de Euler.

A curva “carga x flecha” correspondente ao presente caso está apresentada na Figura 4.a (excentricidade $e = 0$; equação simplificada da curvatura).



Equilíbrio	
—	Estável
- - -	Instável
— · —	Indiferente

e – excentricidade da carga P_{cr} – carga crítica B – ponto de bifurcação

Figura 4
 Curvas Carga x Flecha
 Pilar em balanço – Regime elástico linear

Na equação 20, a cada valor de n corresponde uma carga crítica associada a um modo de flambagem, sendo n também o número de “nós”, ou seja, o número de vezes em que a linha elástica intercepta o eixo x .

4.1.1.b Flambagem – Equação exata da curvatura

Para levantar a indeterminação da resposta da estrutura em deslocamento para cargas de compressão superior à carga crítica, Euler substituiu na análise do item anterior a expressão simplificada da curvatura pela expressão exata (equação 1), válida para grandes deslocamentos,

$$\frac{1}{r(x)} = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} \quad (1)$$

Desta forma, determinou a equação da deformada da barra (denominada “elástica”), levantando portanto a indeterminação apresentada no item anterior. A curva “carga x flecha” correspondente ao caso analisado está apresentada na Figura 4.a (excentricidade $e = 0$; equação completa da curvatura). Note-se, nesta curva, que a magnitude dos deslocamentos depende da intensidade da carga axial, porém sem manter relação de linearidade.

Também, verificou que a carga crítica manteve-se inalterada (conforme a equação 22), concluindo que a adoção da curvatura aproximada é suficiente para o cálculo correto desta carga.

4.1.2 Compressão excêntrica – Efeitos de 2ª ordem

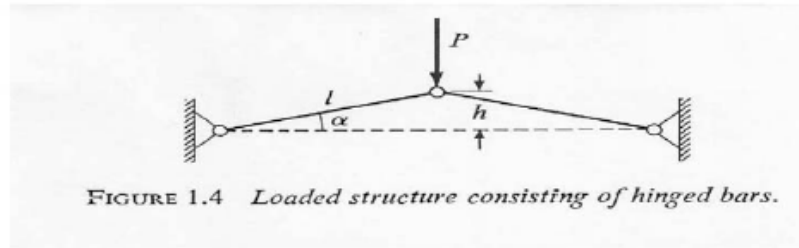
Para o caso da barra engastada submetida à compressão excêntrica (Figura 1), os deslocamentos transversais se manifestam logo de início com o aumento da carga aplicada —conforme mostram as curvas “carga x flecha” da Figura 4.b (excentricidade $e \neq 0$; equações simplificada e exata da curvatura)—, concomitantemente com o desenvolvimento de momento fletor devido à excentricidade inicial da carga de compressão e incremento por efeito de segunda ordem.

Portanto, nesse caso, considerando a expressão simplificada ou exata da curvatura, não ocorre instabilidade estrutural por aparecimento de bifurcação de equilíbrio ou de ponto limite, mas apenas efeitos de 2ª ordem.

Como referência, as curvas para material elástico linear das Figuras 4.a (compressão axial) e 4.b (compressão excêntrica) estão rerepresentadas no mesmo gráfico da Figura 4.c. Note-se nesta figura que as curvas para compressão excêntrica (associadas às equações simplificada ou completa da curvatura) são assíntotas às correspondentes curvas para compressão axial.

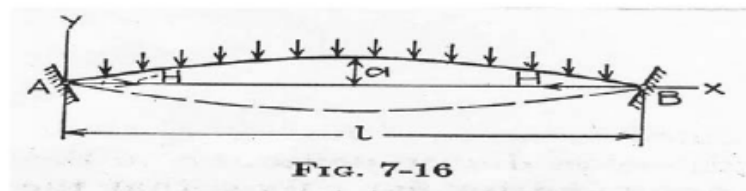
4.1.3 Instabilidade por inversão de configuração geométrica

O caso de instabilidade por aparecimento de ponto limite com inversão de configuração geométrica (com denominação na língua inglesa de *snap through*) pode ocorrer para estruturas muito abatidas, podendo-se citar como exemplo as seguintes estruturas simétricas: a composta por duas barras idênticas, não rígidas, articuladas em suas extremidades, formando uma figura em V invertido, conforme a Figura 5.a [ZIEGLER (1968), SOUZA LIMA e VENANCIO FILHO (1984)], e o arco mostrado na Figura 5.b [TIMOSHENKO (1961)].



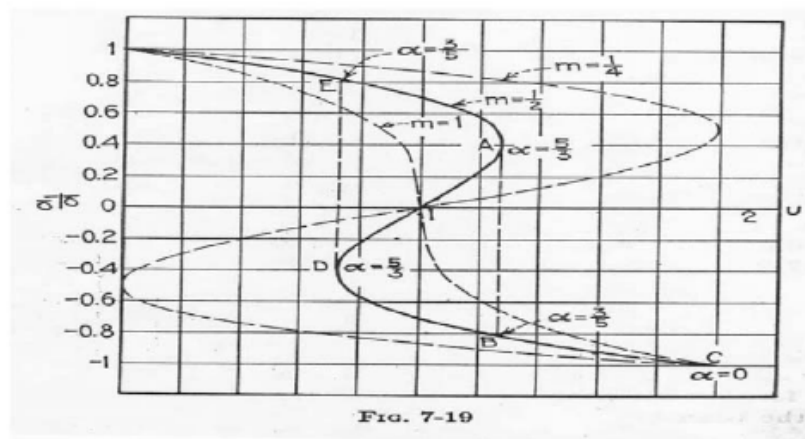
a) Estrutura formada por barras articuladas

[Ziegler (1968)]



b) Arco abatido

[Timoshenko (1961)]



c) Curva "Carga x Flecha" para o arco abatido

[Timoshenko (1961)]

Figura 5

Estruturas abatidas

Instabilidade com inversão de configuração geométrica

A estrutura em arco referida, convexa para cima, é articulada em suas bases (nascenças) e submetida a cargas distribuídas verticais, conforme indica a Figura 5.b, onde se adota a notação seguinte: a - flecha do arco na posição inicial; l - corda; H - reações horizontais de apoio.

Sob hipótese de material elástico linear e deformações e rotações (deslocamentos angulares) pequenas, a solução gráfica apresentada na Figura 5.c

foi determinada por TIMOSHENKO (1961), na qual se adotam os adimensionais a_1/a em ordenada e u em abcissa, sendo:

a : flecha do arco em sua geometria inicial

a_1 : flecha do arco deformado [“amplitude” do fecho em relação à corda (“linha das impostas”)]

A : área da seção transversal do arco

E : módulo de elasticidade do material

I : momento de inércia da seção transversal do arco

q : carga distribuída uniforme vertical

u : carregamento adimensional, definido por

$$u = \frac{5ql^4}{384EIa} \quad (23)$$

m : adimensional que identifica as várias curvas da Figura 5.c, dependendo das características geométricas do arco adotado, definido por

$$m = \frac{4I}{Aa^2} \quad (24)$$

Para fixar idéia, considere como exemplo a curva cheia, correspondente a $m=1/2$, sem perda de generalidade. Nessa curva, observa-se que o deslocamento aumenta gradualmente com a carga até o ponto A, que corresponde ao denominado ponto limite (ponto de máximo). A partir desse ponto é possível verificar que o sistema apresenta o comportamento seguinte:

- Com redução controlada de carregamento, é possível equilíbrio instável segundo a trajetória AD, seguido de aumento de carga no trecho DB, notando-se que no ponto B o nível de carregamento é o mesmo do ponto limite A, porém com deslocamento já invertido em relação ao do ponto A. Este comportamento é somente possível em condições controladas, portanto, sem interesse prático.
- Para aumento de carga a partir do ponto A, não há qualquer configuração de equilíbrio possível, estável ou instável, próxima da configuração inicial. Contudo, suporta acréscimo de carga através de uma brusca e radical mudança de forma (snap through), ou seja, inversão da configuração geométrica inicial, indicada na Figura 5.c pela linha tracejada AB. Nesse caso, a estrutura se equilibra de forma estável no ponto B, a partir do qual, é possível, se a estrutura possuir resistência suficiente, aumentar o carregamento em situação de equilíbrio estável, com aumento de deslocamento (trecho da curva BC).

Se, ao contrário, ocorrer descarregamento gradual da estrutura a partir do ponto B, os deslocamentos diminuem segundo a trajetória BD. Em D, a carga aplicada é insuficiente para manter o arco deformado na posição côncava para baixo, mudando bruscamente sua configuração para a posição original, atingindo o ponto E.

Note-se que a mudança brusca da forma geométrica caracteriza ELU de instabilidade. Também, a instabilidade foi atingida sem haver outra configuração de equilíbrio possível nas proximidades da configuração inicial. Portanto, diz-se que ocorreu instabilidade pelo surgimento de ponto limite e não flambagem, pois não surgiu bifurcação do equilíbrio. Note-se neste particular que TIMOSHENKO (1961) denomina também, genericamente, este fenômeno por “*buckling*”, termo que por sua vez costuma ser traduzido genericamente para o português como “flambagem” [RATZERSDORFER (1955)].

4.2 Instabilidade no regime não linear

Para estruturas de material não linear, descreve-se a seguir a ocorrência de casos de instabilidade de estruturas relativas ao aparecimento de bifurcação de equilíbrio, ponto limite sem e com inversão de configuração geométrica.

4.2.1 Compressão axial – Instabilidade por bifurcação de equilíbrio

Da mesma forma como foi verificada a ocorrência de bifurcação de equilíbrio para o caso do pilar em balanço composto por material elástico linear submetido à compressão axial, para material não linear também ocorre bifurcação de equilíbrio, caracterizando instabilidade por flambagem, conforme mostra a curva “carga x flecha” da Figura 6.a.

Excentricidade	Equação completa da curvatura
Compressão axial $e = 0$ (a)	
Compressão excêntrica $e \neq 0$ (b)	
Casos (a) e (b) juntos (c)	

Equilíbrio	
—	Estável
- - -	Instável

e – excentricidade da carga
 B – ponto de bifurcação

P_{cr} – carga crítica
 PL – ponto limite

Figura 6
 Curvas Carga x Flecha
 Pilar em balanço – Regime não linear

Note-se, contudo, as seguintes diferenças marcantes:

- No caso de material elástico linear, ao se atingir a carga crítica, devido à bifurcação de equilíbrio é possível aumentar a carga de duas formas: na configuração inicial de modo instável ou em configuração fletida estável (Figura 4.a / equação da curvatura completa). Nesse caso, o ponto de bifurcação é denominado estável.
- No caso de material não linear, ao se atingir a carga crítica, também ocorre bifurcação de equilíbrio, sendo possível aumentar a carga segundo a configuração inicial de modo instável ou reduzir a carga de forma controlada com de aumento de flecha, também de modo instável, conforme a curva “carga x flecha” da Figura 6.a. Nesse caso, o ponto de bifurcação é denominado instável.

4.2.2 Compressão excêntrica – Instabilidade por ponto limite

Para estrutura de material não linear, submetida à compressão excêntrica, ocorre instabilidade por meio do surgimento de ponto limite, sem inversão de configuração geométrica, conforme mostrado na Figura 6.b.

Nessa figura verifica-se que ao se atingir a carga crítica P_{cr} (ponto de máximo da carga), ou carga limite P_L como denominam alguns autores [RATZERDORSFER (1955)], não há possibilidade de equilíbrio para a condição de aumento de carga, o que caracteriza ELU de instabilidade. Contudo, é possível equilíbrio instável com redução controlada de carga, ainda que com aumento de flecha (situação viável apenas em laboratório, sem interesse prático).

Como referência, as curvas para material não linear das Figuras 6.a (compressão axial) e 6.b (compressão excêntrica) estão rerepresentadas no mesmo gráfico da Figura 6.c. Note-se nesta figura que a curva para compressão excêntrica é assíntota à correspondente curva para compressão axial.

O primeiro a verificar que solicitação de compressão excêntrica em estrutura de material não linear gera problema de instabilidade através de ponto limite, sem inversão de configuração geométrica, foi Von Kármán, segundo RATZERDORSFER (1955).

4.2.3 Instabilidade por inversão de configuração geométrica

O fenômeno mencionado no item 4.1.3, relativo à instabilidade de estruturas de material elástico linear, caracterizada por mudança brusca da configuração geométrica através de inversão de forma, pode também ocorrer de maneira semelhante para estruturas de material não linear.

4.3 Linearização do momento externo

A análise estrutural é matematicamente muito mais simples para sistemas com características lineares. Neste item verifica-se em que condições, em teoria de 2ª ordem, o momento externo pode ser linearizado em relação à curvatura.

Em análise de 1ª ordem, o momento externo é expresso por

$$M_e(x) = M_1(x) = Pe \quad (25)$$

Portanto, $M_e(x)$ é função constante da curvatura $1/r(x)$.

Em análise de 2ª ordem, pode-se adotar para a linha elástica fletida de pilares em balanço a hipótese de variação senoidal —do mesmo tipo da linha elástica na situação de flambagem—, que obedeça às condições de contorno geométricas da estrutura, ou seja,

$$y(x) = \delta(1 - \cos \kappa x) \quad (18)$$

$$\kappa L = L[P/(EI)]^{1/2} = \pi/2 \Rightarrow \kappa = \frac{\pi}{L_e} \quad (21)$$

Combinando essas duas equações, obtém-se

$$y(x) = \delta - \delta \cos \frac{\pi}{L_e} x \quad (26)$$

onde, $L_e = 2L$ corresponde ao comprimento de flambagem do pilar em balanço, sendo L o comprimento do pilar.

4.3.1.a Uso da equação simplificada da curvatura

A substituição da derivada segunda de $y(x)$, determinada a partir da equação 26 na equação simplificada da curvatura (equação 2), obtém-se

$$\frac{1}{r(x)} = \frac{d^2 y}{dx^2} = \delta \left(\frac{\pi}{L_e} \right)^2 \cos \frac{\pi}{L_e} x \quad (27)$$

Combinando-se as expressões 26 e 27,

$$y(x) = \delta - \left(\frac{L_e}{\pi} \right)^2 \frac{1}{r(x)} \quad (28)$$

A substituição da expressão 28 na equação 4 para o momento externo, resulta

$$M_e(x) = P_e + P \left(\frac{L_e}{\pi} \right)^2 \frac{1}{r(x)} \quad (29)$$

Fazendo $k = (L_e/\pi)^2$, tem-se

$$M_e(x) = P_e + Pk \frac{1}{r(x)} \quad (30)$$

Assim, comparando com as equações 7 e 25, pode-se identificar na equação 30 o termo independente $M_1 = P_e$ e o momento de 2ª ordem M_2

$$M_2(x) = Pk \frac{1}{r(x)} \quad (31)$$

Desta forma, para as hipóteses adotadas, M_2 é função linear da curvatura, com coeficiente angular Pk .

Em resumo, se forem adotadas variação senoidal para a linha elástica, que obedeça as condições de contorno geométricas da estrutura e a expressão simplificada da curvatura, a relação momento M_2 x curvatura $1/r$ será linear.

Note-se que a função senoidal empregada para a linha elástica é solução exata para a estrutura considerada, no caso de não haver cargas transversais aplicadas à barra [FUSCO (1981)].

4.3.1.b Uso da equação completa da curvatura

Seguindo os mesmos passos do item anterior, a substituição da derivada segunda de $y(x)$, determinada a partir da equação 26 na equação completa da curvatura (equação 1) resulta em

$$\frac{1}{r(x)} = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{\delta \left(\frac{\pi}{L_e}\right)^2 \cos \frac{\pi}{L_e} x}{\left\{1 + \left[\delta \left(\frac{\pi}{L_e}\right) \text{sen} x\right]^2\right\}^{3/2}} \quad (32)$$

Combinando-se as expressões 26 e 32,

$$y(x) = \delta - \left\{1 + \left[\delta \left(\frac{\pi}{L_e}\right) \text{sen} x\right]^2\right\}^{3/2} \left(\frac{L_e}{\pi}\right)^2 \frac{1}{r(x)} \quad (33)$$

A substituição da expressão 33 na equação 4 para o momento externo, resulta

$$M_e(x) = Pe + P \left\{1 + \left[\delta \left(\frac{\pi}{L_e}\right) \text{sen} x\right]^2\right\}^{3/2} \left(\frac{L_e}{\pi}\right)^2 \frac{1}{r(x)} \quad (34)$$

Fazendo $k = (L_e/\pi)^2$, constante, tem-se

$$M_e(x) = Pe + P \left\{1 + \left[\delta \left(\frac{\pi}{L_e}\right) \text{sen} x\right]^2\right\}^{3/2} k \frac{1}{r(x)} \quad (35)$$

Assim, comparando com a equação 7, pode-se identificar na equação 35 o termo independente $M_1 = Pe$ e o momento de 2ª ordem M_2

$$M_2(x) = P \left\{1 + \left[\delta \left(\frac{\pi}{L_e}\right) \text{sen} x\right]^2\right\}^{3/2} k \frac{1}{r(x)} \quad (36)$$

Desta forma, usando a equação completa da curvatura, verifica-se que M_2 é função não linear da curvatura.

4.4 Verificação da estabilidade das configurações de equilíbrio

A verificação da estabilidade do equilíbrio, ou impossibilidade de equilíbrio, será abordada no item seguinte, fazendo-se uso das variações dos momentos externos e internos em função da curvatura.

Recorde-se que, como descrito no item 4.1.1.a, a cada inteiro positivo n na equação 20 corresponde uma carga crítica associado a um modo de flambagem, sendo n o número de “nós” (intersecções da linha elástica com o eixo x) da deformada elástica; portanto, para $n \geq 2$, haverá “inflexões”.

A verificação da estabilidade ou instabilidade das configurações de equilíbrio não decorre de noções intuitivas, mas deve ser demonstrada de forma rigorosa.

Para o caso de pilar em balanço e submetida à compressão axial, referência é feita aos três teoremas seguintes, enunciados e demonstrados por RATZERDORSFER (1954).

- **Teorema 1:** “A forma reta é estável quando a carga é inferior à primeira carga de flambagem, e instável quando é superior a esse limite.”
- **Teorema 2:** “A configuração fletida, sem inflexões, é sempre estável, desde que essa forma exista como possível posição de equilíbrio”.
- **Teorema 3:** “As configurações de equilíbrio, com inflexões, são instáveis, pelo menos quando a inclinação da tangente à elástica, em relação à vertical, for menor do que aproximadamente 80° . Mas esse resultado também é válido no caso (que na prática não ocorre) em que essa inclinação é maior do que 80° ”.

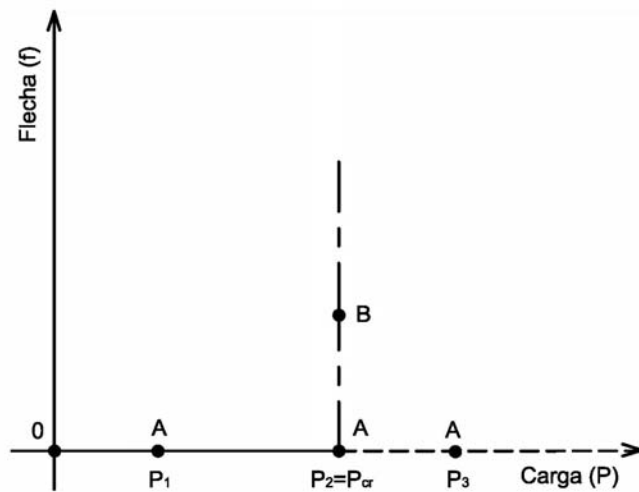
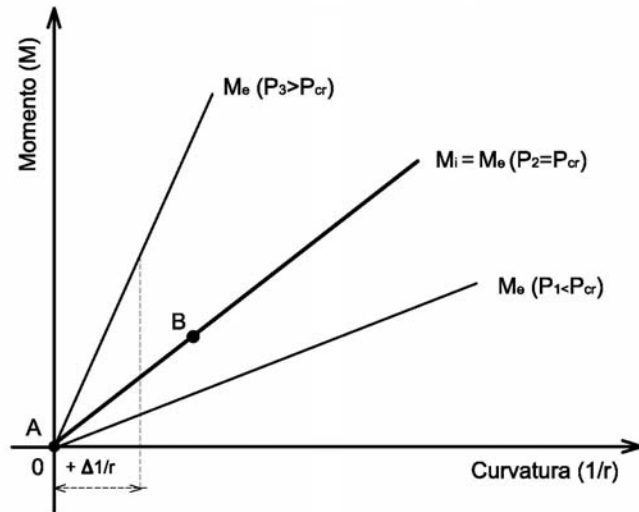
Observe-se que este autor pondera não ser convincente demonstrações de estabilidade de equilíbrio de estruturas por analogia a equilíbrio de corpos rígidos em campo gravitacional, que se baseiam na consideração de que “a posição mais baixa é, em geral, a mais estável”.

Outra maneira usual de verificação da estabilidade de uma configuração de equilíbrio é, mantendo-se a carga aplicada, impor uma perturbação no equilíbrio, através da variação da deformada e verificar se, cessada a perturbação, há ou não tendência de retorno à posição inicial de equilíbrio. Com este objetivo, as curvas do momento externo e do momento interno em função da curvatura são confrontadas e analisadas, conforme se descreve a seguir. Este procedimento, com base em imposição de perturbação de posição, é válido e pode ser justificado pela teoria dos sistemas conservativos [ZAGOTTIS (1980)].

As curvas do momento externo e do momento interno, em função da curvatura, são apresentadas de forma qualitativa nas Figuras 7 a 12, referentes aos casos já analisados, ou seja:

- Figura 7 – Regime linear – Compressão axial. Equação simplificada da curvatura (momento externo linearizado).
- Figura 8 – Regime linear – Compressão axial. Equação completa da curvatura.
- Figura 9 – Regime linear – Compressão excêntrica. Equação simplificada da curvatura (momento externo linearizado).
- Figura 10 – Regime linear – Compressão excêntrica. Equação completa da curvatura.

- Figura 11 – Regime não linear – Compressão axial. Equação completa da curvatura.
- Figura 12 – Regime não linear – Compressão excêntrica. Equação simplificada da curvatura (momento externo linearizado).

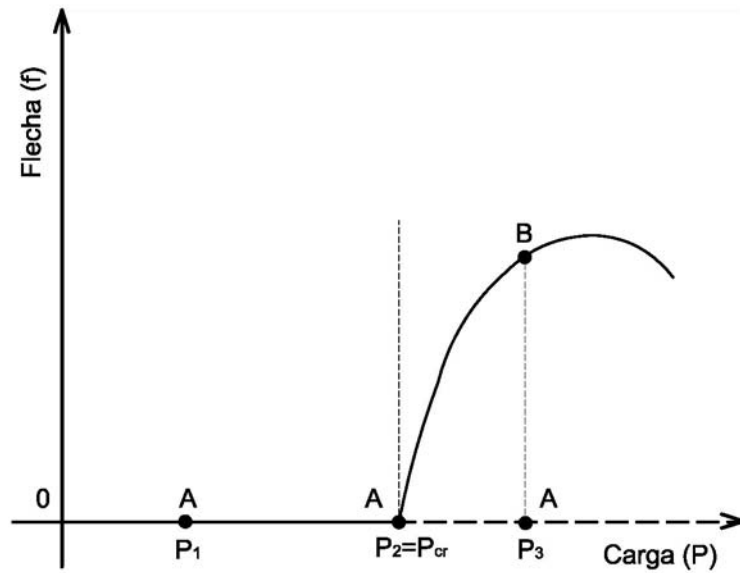
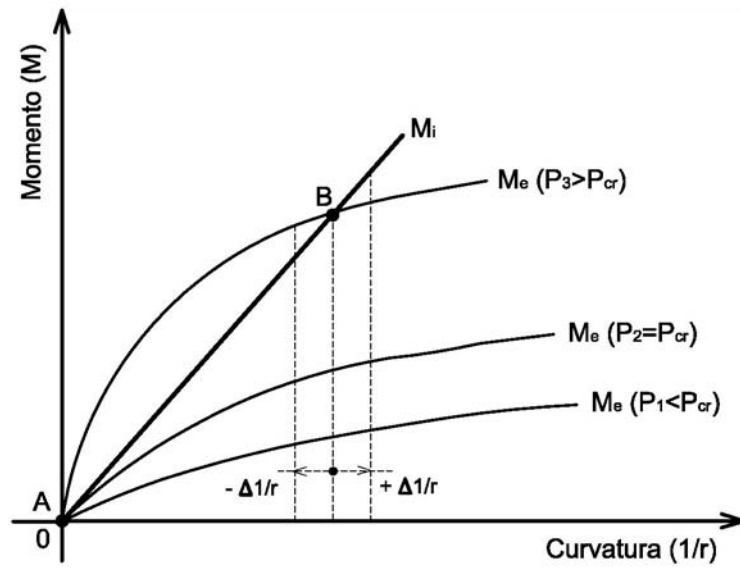


Equilíbrio	
—————	Estável
- - - - -	Instável
- · - · -	Indiferente

M_i – momento interno M_e – momento externo
 $P_1 < P_{cr} \Rightarrow M_e < M_i$ para $+\Delta 1/r \Rightarrow A$ estável
 $P_2 = P_{cr} \Rightarrow M_e = M_i$ para $+\Delta 1/r \Rightarrow A$ estável e B indiferente
 $P_3 > P_{cr} \Rightarrow M_e > M_i$ para $+\Delta 1/r \Rightarrow A$ instável

Figura 7

Estabilidade de equilíbrio
 Regime linear – Compressão axial
 Equação simplificada da curvatura

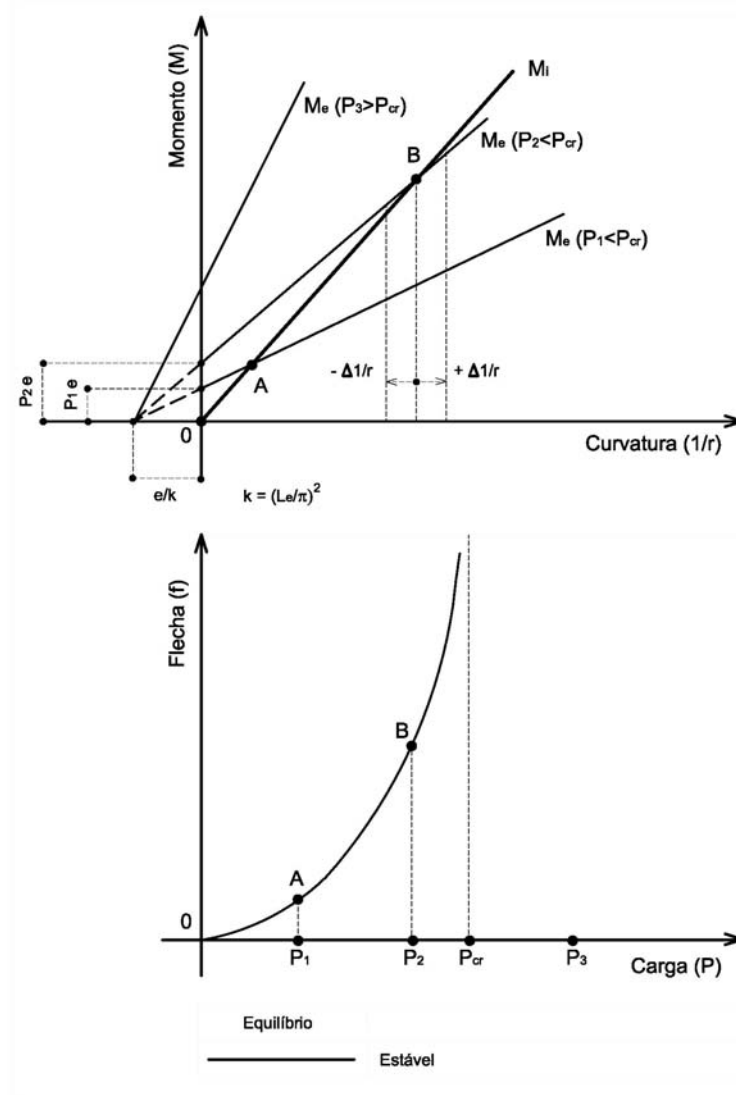


Equilíbrio	
—	Estável
- - -	Instável

M_i – momento interno M_e – momento externo
 $P_1 < P_{cr} \Rightarrow A$ estável
 $P_2 = P_{cr} \Rightarrow A$ estável (ponto de bifurcação)
 $P_3 > P_{cr} \Rightarrow A$ instável e B estável

Figura 8

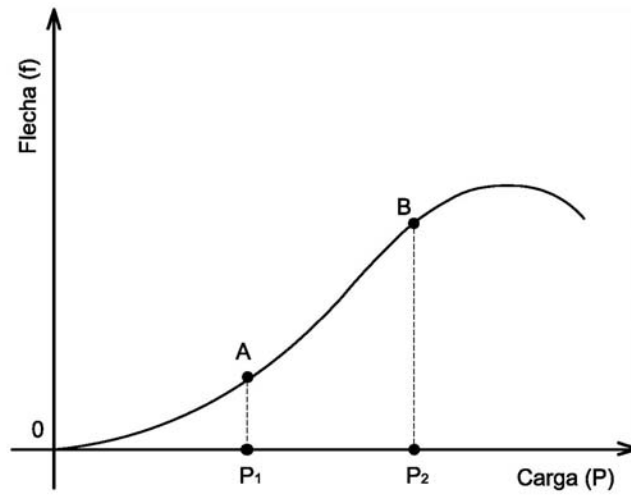
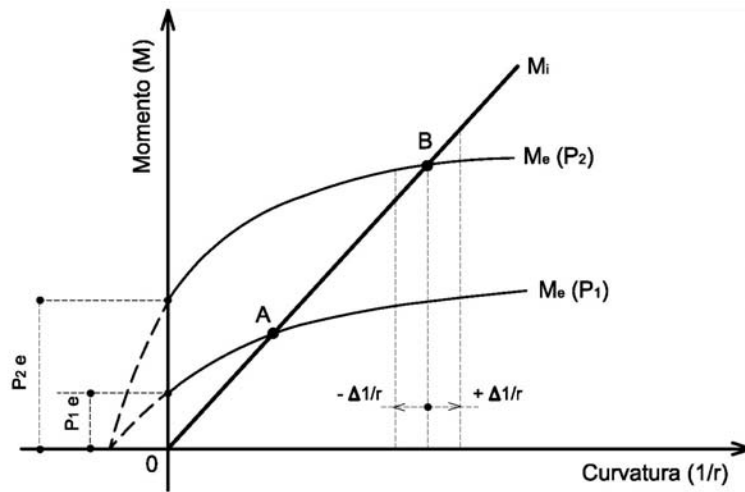
Estabilidade de equilíbrio
 Regime linear – Compressão axial
 Equação completa da curvatura



M_i – momento interno M_e – momento externo
 $P_1 < P_{cr} \Rightarrow A$ estável
 $P_2 < P_{cr} \Rightarrow B$ estável
 $P_3 > P_{cr} \Rightarrow$ equilíbrio impossível

Figura 9

Estabilidade de equilíbrio
 Regime linear – Compressão excêntrica
 Equação simplificada da curvatura

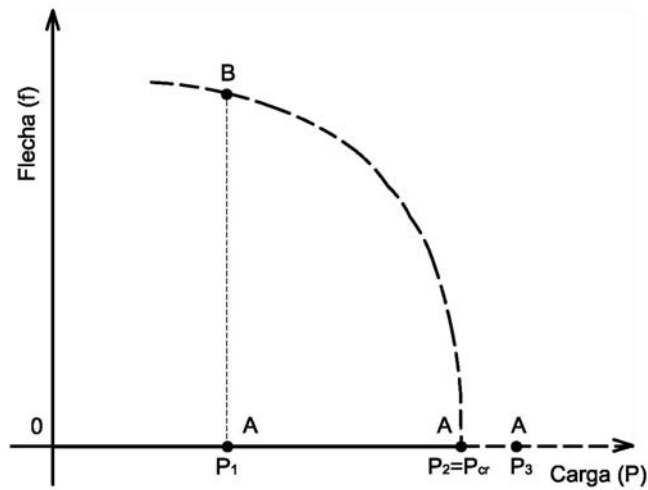
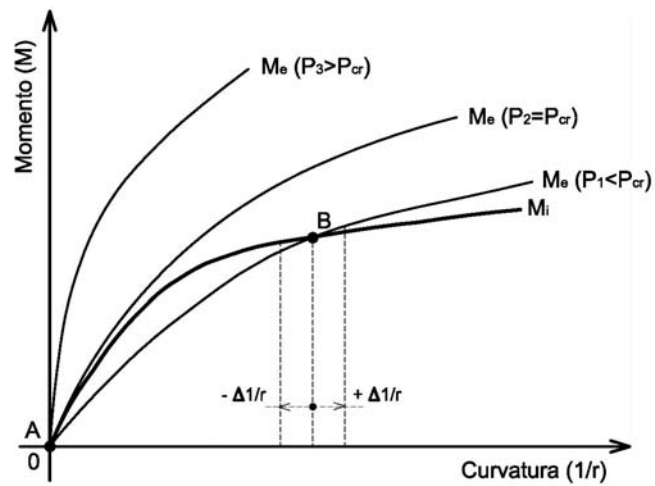


Equilíbrio

————— Estável

M_i – momento interno M_e – momento externo
 $P_1 \Rightarrow A$ estável $P_2 \Rightarrow B$ estável

Figura 10
 Estabilidade de equilíbrio
 Regime linear – Compressão excêntrica
 Equação completa da curvatura



Equilíbrio	
—	Estável
- - -	Instável

M_i – momento interno M_e – momento externo

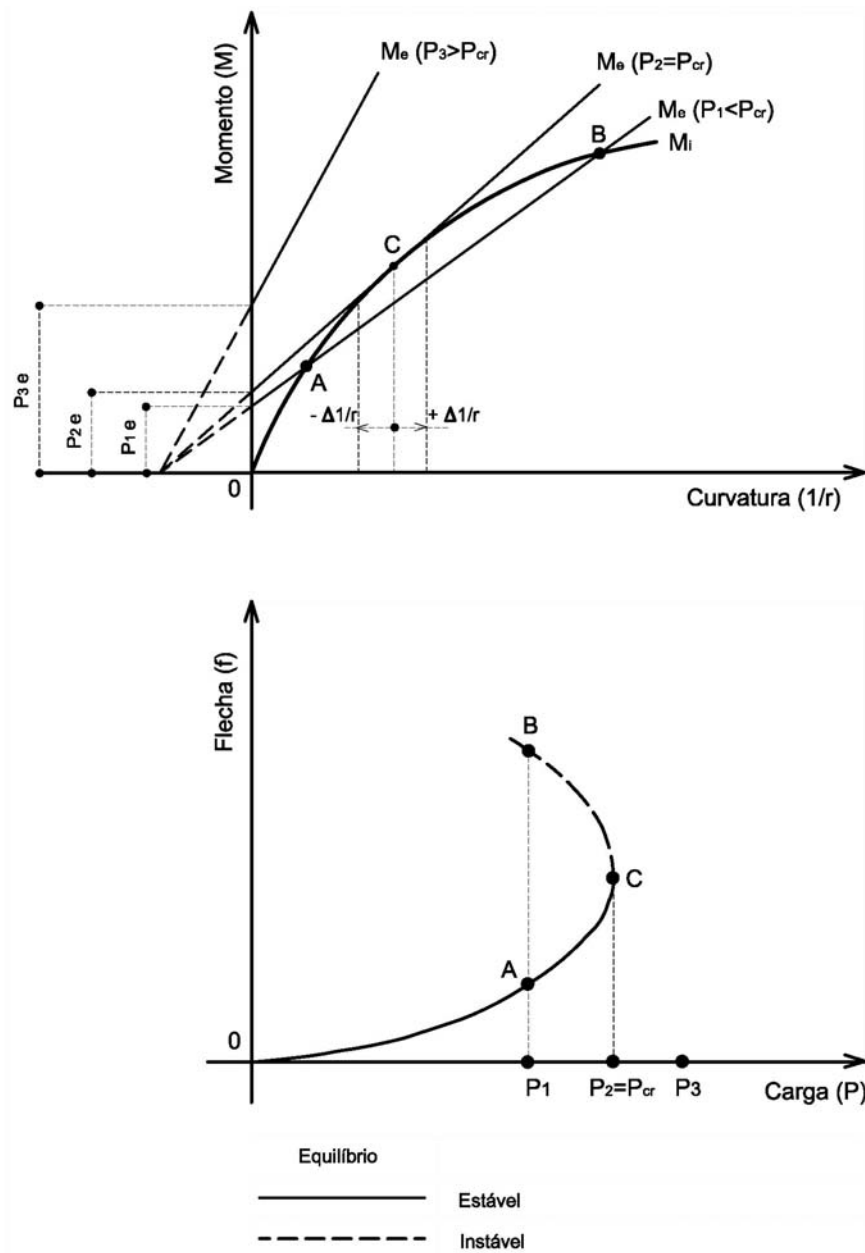
$P_1 < P_{cr} \Rightarrow A$ estável e B instável

$P_2 = P_{cr} \Rightarrow A$ instável (ponto de bifurcação)

$P_3 > P_{cr} \Rightarrow A$ instável

Figura 11

Estabilidade de equilíbrio
Regime não linear – Compressão axial
Equação completa da curvatura



M_i – momento interno M_e – momento externo
 $P_1 < P_{cr} \Rightarrow$ A estável e B instável
 $P_2 = P_{cr} \Rightarrow$ C instável (ponto limite)
 $P_3 > P_{cr} \Rightarrow$ equilíbrio impossível

Figura 12

Estabilidade de equilíbrio
 Regime não linear – Compressão excêntrica
 Momento externo linearizado

Nas Figuras 7 (regime linear – compressão axial), 9 (regime linear – compressão excêntrica) e 12 (regime não linear – compressão excêntrica), foi considerada a equação simplificada da curvatura e os momentos externos foram linearizados, conforme descrito no item 4.3, sem prejuízo à análise pretendida, o que é possível verificar de forma qualitativa nessas figuras, supondo momentos externos não lineares.

Nas figuras acima referidas, no equilíbrio tem-se obrigatoriamente $M_e = M_i$, condição que corresponde à intersecção das curvas dos momentos interno e externo.

Para verificar se um ponto de equilíbrio é estável ou não, perturba-se o equilíbrio, impondo-se variações da curvatura (decréscimo ou acréscimo, no sentido de reduzir ou aumentar a flexão, respectivamente), mantendo-se a carga, da seguinte forma:

- Para qualquer decréscimo de curvatura ($-\Delta r$) a partir do ponto de equilíbrio, observando-se:
 - $M_e > M_i$, o equilíbrio é estável, pois a posição original de equilíbrio é restaurada;
 - $M_e < M_i$, o equilíbrio é instável, pois a posição original de equilíbrio não é restaurada;
 - $M_e = M_i$, o equilíbrio é indiferente, pois ocorre também equilíbrio na posição perturbada.
- Para qualquer acréscimo de curvatura ($+\Delta r$) a partir do ponto de equilíbrio, observando-se:
 - $M_e < M_i$, o equilíbrio é estável, pois a posição original de equilíbrio é restaurada;
 - $M_e > M_i$, o equilíbrio é instável, pois a posição original de equilíbrio não é restaurada;
 - $M_e = M_i$, o equilíbrio é indiferente, pois ocorre também equilíbrio na posição perturbada.

Assim, se ocorrerem as condições de estabilidade apontadas para as variações $-\Delta r$ e $+\Delta r$, o equilíbrio será estável. Ao contrário, se ocorrer apenas uma ou duas condições de instabilidade para essas variações, o equilíbrio será instável. A não possibilidade de intersecção das curvas em configurações deformadas indica impossibilidade de equilíbrio.

Observa-se nos gráficos da Figura 7 —referentes a pilar em balanço, material elástico linear, compressão axial, momento externo linearizado— que a única posição de equilíbrio ($M_e = M_i$) é o ponto A, que corresponde à configuração indeformada, pois a curvatura é nula. Dando-se um acréscimo qualquer de curvatura $+\Delta r$ (nesse caso em particular não é possível impor decréscimo de curvatura $-\Delta r$), a partir da posição de equilíbrio, conforme indicado na Figura 7, verifica-se para os vários níveis de carga aplicada P_i as seguintes possibilidades:

- $P_1 < P_{cr}$: o equilíbrio é estável, pois $M_e < M_i$.
- $P_2 = P_{cr}$: o equilíbrio é indiferente, pois $M_e = M_i$.
- $P_1 > P_{cr}$: o equilíbrio é instável, pois $M_e > M_i$.

As cargas P_1 , P_2 e P_3 estão indicadas no gráfico flecha x carga, também apresentada na Figura 7.

Como outro exemplo de verificação de estabilidade de equilíbrio, analisam-se os gráficos da Figura 12, correspondente ao caso de pilar em balanço, considerando material não linear, compressão excêntrica e momento externo linearizado. O momento externo é linearizado por questão de simplicidade, mas caso não o fosse a análise seria semelhante. Como se trata de flexo-compressão, a barra desde o início da aplicação da carga excêntrica sofre deslocamento transversal. Da mesma forma que na análise anterior, a perturbação do equilíbrio é dada através da variação da curvatura, a partir da posição de equilíbrio considerada, verificando-se para os vários níveis de carga aplicada P_i , conforme indicado na Figura 12, as seguintes possibilidades:

- $P_1 < P_{cr}$: o equilíbrio no ponto A é estável, pois $M_e > M_i$ para $-\Delta r$ e $M_e < M_i$ para $+\Delta r$.
- $P_2 = P_{cr}$: o equilíbrio no ponto C é instável, pois $M_e > M_i$ para $+\Delta r$.

Atingida a carga $P_2 = P_{cr}$, duas trajetórias de carga são possíveis: redução controlada de carga (para P_1) ou aumento de carga (para P_3), ou seja,

- $P_1 < P_{cr}$ (com descarga controlada): o equilíbrio no ponto B é instável, pois $M_e < M_i$ para $-\Delta r$ e $M_e > M_i$ para $+\Delta r$.
- $P_3 > P_{cr}$: o equilíbrio é impossível.

As cargas P_1 a P_3 estão indicadas no gráfico flecha x carga, também apresentada na Figura 12.

Para os outros casos acima referidos, referentes às Figuras 8 a 11, a estabilidade ou a instabilidade dos pontos de equilíbrio pode ser verificada de modo inteiramente análogo ao descrito acima para as Figuras 7 e 12.

4.5 Resumo dos casos de instabilidade

Apresenta-se na tabela abaixo um resumo dos casos de instabilidade descritos nesse capítulo. As análises referidas nesta tabela, para material elástico linear, serão abordadas no capítulo seguinte.

Tabela 1 – Resumo de casos de instabilidade analisados

Estrutura	Material	Carregamento	Instabilidade
reticulada	EL	compressão axial	bifurcação de equilíbrio
reticulada	EL	compressão excêntrica	não ocorre
abatida	EL	perpendicular à corda ⁽¹⁾	inversão de configuração
reticulada	NL	compressão axial	bifurcação de equilíbrio
reticulada	NL	compressão excêntrica	ponto limite
abatida	NL	perpendicular à corda ⁽¹⁾	inversão de configuração

⁽¹⁾ No caso de arco simétrico abatido, as cargas são perpendiculares à corda (“linha das impostas”).

EL – material elástico linear

NL – material não linear

Deve-se notar que, ao se atingir o ponto de bifurcação de equilíbrio ou o ponto limite, sem ou com inversão da configuração geométrica, atingiu-se o ELU de instabilidade, caso não tenha sido atingido antes o ELU por esgotamento de resistência. O estudo do comportamento posterior ao ELU de instabilidade tem interesse apenas teórico, para entendimento completo do fenômeno.

5 ANÁLISE DE 2ª ORDEM E DE ESTABILIDADE – REGIME ELÁSTICO LINEAR

Neste capítulo serão analisados os casos de instabilidade relativos a compressão axial e a inversão de configuração geométrica, considerando-se material elástico linear. Também, será abordada solicitação de compressão excêntrica, caso em que apenas se têm efeitos de 2ª ordem, sem ocorrência de instabilidade, conforme descrito no capítulo anterior.

Antes, descreve-se o chamado método geral para análise dos efeitos de 2ª ordem e não linearidade geométrica (NLG) associada. Faz-se também referência a métodos matriciais de cálculo, que possibilitam a análise prática dos fenômenos referidos para estruturas mais complexas.

Note-se que a análise para solução em regime linear, apresentada neste capítulo, pode também ser empregada no tratamento de problemas em regime não linear, como é o caso de estruturas de concreto armado pelo uso das simplificações preconizadas pela NBR 6118 (2003), conforme será abordado no capítulo 6.

5.1 Análise não linear geométrica

Algumas soluções analíticas de problemas de instabilidade são apresentadas na literatura, como por exemplo referentes à flambagem de viga engastada (item 4.1.1) e de arco abatido (item 4.1.3), etc. Porém, as soluções analíticas formais existentes são restritas em função da complexidade teórica e matemática envolvida.

Desta maneira, foram desenvolvidos vários métodos iterativos e aproximados, como o chamado método geral, cujo conceito está descrito a seguir. Esses métodos tornam-se extremamente eficientes quando fazem uso da formulação matricial (item 5.1.2).

5.1.1 Método geral para material linear e análise não linear geométrica

Um resumo do método geral, considerando regime elástico linear, destinado à análise de efeitos de 2ª ordem, é a seguir descrito segundo o processo do carregamento progressivo [FUSCO (1981)]. Esse método é trabalhoso por envolver inúmeras iterações, mas é completo no sentido que tende a acompanhar passo a passo os acréscimos dos efeitos de 2ª ordem até atingir o equilíbrio final da

estrutura. Por isso, sua conceituação é importante para melhor entendimento do fenômeno da NLG.

Toma-se como exemplo um pilar em balanço submetido à compressão excêntrica (Figura 1). Note-se, contudo, que o método é aplicável, em princípio, a qualquer tipo de estrutura e de carregamento. O método basicamente aplica a carga total em estágios, de forma crescente, considerando em cada estágio o equilíbrio referido à geometria da estrutura deformada.

Descrição do método geral

Observe-se que no caso em particular da Figura 1, como deslocamento y de referência será tomada a flecha na extremidade livre e que o momento será calculado no engastamento, onde ocorre o valor máximo.

- A carga P é aplicada de forma progressiva em certo número N de etapas, a partir de zero (estrutura descarregada).
- Em uma etapa genérica n ($n = 1$ a N), após a etapa $n-1$, aplica-se um incremento de carga ΔP_n , de forma que

$$P_n = P_{n-1} + \Delta P_n \quad (37)$$

portanto,

$$\Delta P_n = P_n - P_{n-1} \quad (38)$$

$$P_n = \sum_1^n \Delta P_i \quad (39)$$

- Na etapa n , exceto para $n=1$ (etapa inicial, quando o processo despreza os efeitos de 2ª ordem), os esforços solicitantes referentes ao carregamento P_n são calculados segundo análise linear, considerando-se a geometria da estrutura deformada determinada na etapa anterior $n-1$, sob o carregamento P_{n-1} , de forma a levar em conta a NLG. Também, conforme é mencionado no item seguinte, deve-se levar em conta a redução da rigidez da estrutura devido à ação da força normal.

Assim, por exemplo, os momentos fletores da estrutura podem ser calculados através de

$$M_n = P_n (e_1 + y_{n-1}) \quad (40)$$

Onde, neste item, e_1 representa a excentricidade do carregamento, $P_n e_1$ o efeito de 1ª ordem e $P_n y_{n-1}$, o efeito de 2ª ordem.

Admite-se que a carga P_n e a excentricidade e_1 não sofram alterações com as deformações de 2ª ordem.

- A Tabela 2 abaixo resume os procedimentos de cálculo descritos.

Tabela 2 – Etapas da aplicação do método geral para análise de 2ª ordem

Etapa	Incremento de carga	Carregamento	Força normal	Momento fletor máximo ⁽²⁾	Deslocamento de referência ⁽³⁾
n	ΔP_n	$P_n = P_{n-1} + \Delta P_n$	$N_n = P_n$	$M_n = P_n (e_1 + y_{n-1})$	y_n
0	$\Delta P_0 = 0$	$P_0 = 0$	$N_0 = 0$	$M_0 = 0$	$y_0 = 0$
1 ⁽¹⁾	ΔP_1	$P_1 = P_0 + \Delta P_1$	$N_1 = P_1$	$M_1 = P_1 (e_1 + y_0)$	y_1
2	ΔP_2	$P_2 = P_1 + \Delta P_2$	$N_2 = P_2$	$M_2 = P_2 (e_1 + y_1)$	y_2
3	ΔP_3	$P_3 = P_2 + \Delta P_3$	$N_3 = P_3$	$M_3 = P_3 (e_1 + y_2)$	y_3
4	ΔP_4	$P_4 = P_3 + \Delta P_4$	$N_4 = P_4$	$M_4 = P_4 (e_1 + y_3)$	y_4
...
N	ΔP_N	$P_N = P_{N-1} + \Delta P_N$	$N_N = P_N$	$M_N = P_N (e_1 + y_{N-1})$	Y_N

⁽¹⁾ – desprezam-se os efeitos de 2ª ordem

⁽²⁾ – momento fletor no engastamento da barra

⁽³⁾ – deslocamento de referência na extremidade livre da barra

A curva carga x deslocamento é do tipo mostrado na Figura 13, sendo que a presença de um ponto de máximo relativo caracteriza a instabilidade do sistema, podendo assim ser determinada a carga crítica correspondente.

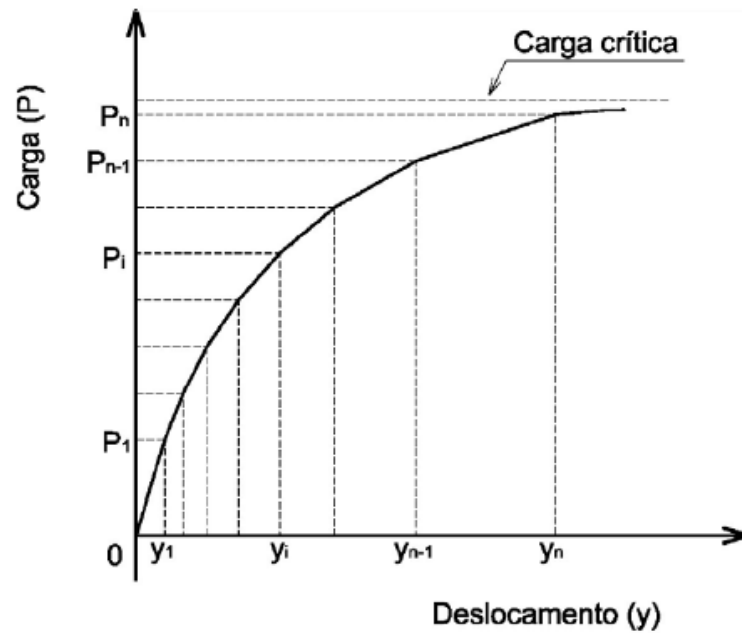


Figura 13
Identificação de instabilidade por ponto limite
(Método Geral)

Observe-se que a solução obtida por meio do processo descrito se aproxima da solução “exata”, com precisão que é dependente da metodologia de análise estrutural empregada em cada etapa e da grandeza dos incrementos de carregamento aplicados, no sentido de que quanto menor seu valor, maior será a precisão obtida.

O método acima descrito é às vezes referido por método $P-\Delta$, principalmente na engenharia civil, denominação que indica o acréscimo de momento de 2ª ordem $P.\Delta$, associado à mudança de posição da carga P devido ao deslocamento Δ , ou seja, ao aumento do braço de alavanca de P em relação à seção transversal considerada.

5.1.2 Formulação matricial para análise não linear geométrica

Para a análise de estruturas mais complexas, aqui com particular referência às estruturas reticuladas, recorre-se à formulação matricial da teoria de 2ª ordem.

Note-se que os fundamentos da análise são os mesmos descritos no item anterior (método geral). Assim, como a geometria da estrutura deformada e os esforços de compressão sofrem alteração durante o processo de instalação do

carregamento total, há necessidade de se aplicar o carregamento progressivamente, em etapas, para acompanhamento do desenvolvimento da resposta da estrutura.

Como a rigidez da estrutura sofre redução com o aumento da solicitação de compressão, na realidade adota-se a rigidez tangente referente ao início da análise linear, em cada etapa.

Assim, a equação matricial (método dos deslocamentos), para incremento de carga ΔP , em determinada etapa, a partir de certo nível de carga P , pode ser escrita,

$$\Delta P = K_t \Delta x \quad (41)$$

onde Δx é o vetor de incremento de deslocamento e K_t a matriz de rigidez tangente que relaciona de modo linear ΔP e Δx . Note-se que símbolo em negrito indica notação de matriz ou vetor. Esta equação permite a determinação dos incrementos de deslocamentos, os quais possibilitam o cálculo do incremento dos esforços solicitantes.

Demonstra-se que a matriz de rigidez tangente K_t é composta por três parcelas da seguinte forma [ZIENCKIEWICZ (1971), SOUZA LIMA E VENANCIO (1984)]

$$K_t = K_0 + \Delta K_0 + K_g \quad (42)$$

onde,

K_0 é a matriz de rigidez usual (ou convencional) da análise linear;

ΔK_0 corresponde à alteração de K_0 devido à mudança das coordenadas nodais, associada à mudança de geometria da estrutura deformada;

K_g é a matriz de rigidez geométrica e representa a influência dos esforços normais na rigidez, sendo que para esforço de compressão, K_g será no sentido de reduzir a rigidez K_0 , traduzindo o fato de que nesse caso a estrutura torna-se mais flexível lateralmente. Para esforços de tração, ocorre o oposto do que foi mencionado para compressão.

Assim, considera-se no processamento inicial a estrutura indeformada e descarregada, impondo-se portanto na equação 42, $K_t = K_0$. Nos processamentos seguintes, K_t sofre sucessivas alterações, visto que a discretização da estrutura é feita, em cada etapa, na configuração geométrica deformada determinada na etapa anterior (conforme mencionado no item 5.1.1), através da consideração de ΔK_0 .

Também, podem ocorrer mudanças dos esforços normais ao longo das etapas o que altera \mathbf{K}_g .

Portanto, através das equações 41 e 42, é possível calcular em cada etapa os deslocamentos, que definirão a geometria da estrutura para a análise da etapa subsequente e os esforços solicitantes, podendo-se desta forma determinar os efeitos de 2ª ordem e eventualmente identificar possibilidade de ocorrência de instabilidade estrutural.

5.2 Análise de estabilidade sob compressão axial

Para o caso de instabilidade sob compressão axial, ou seja, por bifurcação de equilíbrio (exemplo de pilar em balanço no item 4.1 – Figura 4.a), há interesse prático apenas na determinação da carga crítica de flambagem e não no comportamento pós flambagem, o que demandaria o uso de teoria de grandes deslocamentos.

Como a carga crítica é determinada justamente no ponto de bifurcação de equilíbrio, até onde ainda não ocorreu deslocamento lateral da viga, a parcela $\Delta\mathbf{K}_0$ da equação 42 deve ser descartada, ou seja,

$$\mathbf{K}_t = \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_g \quad (43)$$

Define-se um carregamento de referência $\bar{\mathbf{P}}$, da seguinte forma

$$\mathbf{P} = \lambda \bar{\mathbf{P}} \quad (44)$$

onde λ é um vetor de componentes reais.

Os esforços normais componentes de \mathbf{N} , correspondentes ao vetor \mathbf{P} , são determinados na configuração indeformada, portanto através de análise de 1ª ordem. Desta forma, se $\bar{\mathbf{N}}$ corresponde a $\bar{\mathbf{P}}$, tem-se,

$$\mathbf{N} = \lambda \bar{\mathbf{N}} \quad (45)$$

Além disso, como se considera a estrutura indeformada, \mathbf{K}_g é função linear das forças normais atuantes, e por isso pode-se escrever,

$$\mathbf{K}_g = \lambda \bar{\mathbf{K}}_g \quad (46)$$

obtendo-se,

$$\mathbf{K}_t = \mathbf{K}_0 + \lambda \bar{\mathbf{K}}_g \quad (47)$$

A condição de instabilidade por bifurcação de equilíbrio é obtida anulando-se o determinante de \mathbf{K}_t , isto é,

$$\det (\mathbf{K}_0 + \lambda \overline{\mathbf{K}}_g) = 0 \quad (48)$$

cuja solução permite a determinação das cargas críticas (autovalores) e dos respectivos modos de flambagem (autovetores).

5.3 Análise de 2ª ordem sob compressão excêntrica

Para o caso de compressão excêntrica (Figura 4.b), conforme mencionado no item 4.1.2 não há possibilidade de ocorrência de instabilidade, fazendo-se então apenas análise de 2ª ordem da estrutura quanto ao ELU de resistência.

Nesse caso, na análise NLG empregam-se todos os termos da equação 42,

$$\mathbf{K}_t = \mathbf{K}_0 + \Delta \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_g$$

5.4 Análise de estabilidade de estrutura abatida

Para o caso de análise de instabilidade de estrutura abatida (exemplo de arco abatido no item 4.1.3 – Figura 5), por inversão de configuração geométrica, a análise NLG emprega todos os termos da equação 42,

$$\mathbf{K}_t = \mathbf{K}_0 + \Delta \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_g$$

Como a instabilidade ocorre por surgimento de ponto limite, sua identificação correspondente a ponto de máximo da curva carga x flecha, como mostrado na Figura 5.

6 ANÁLISE DE 2ª ORDEM E DE ESTABILIDADE – REGIME NÃO LINEAR

Para materiais não lineares, análises numéricas rigorosas, levando em conta a NLG e a NLF —conforme por exemplo o método geral (item 5.1.1)— conduzem a resultados precisos no que se refere à estrutura global bem como aos seus elementos isoladamente.

Contudo, essas análises são complexas e trabalhosas. Conforme exemplifica MACGREGOR (1993), seria consideravelmente dispendiosa a análise estrutural rigorosa de um edifício de concreto armado de 20 andares, pelo motivo de que essa análise abrangeria mais de 1000 elementos de barra e teria possivelmente mais de 2000 seções críticas a serem verificadas.

Por outro lado, por questão de maior facilidade, atualmente há quantidade razoável de programas para análise de 2ª ordem, sem a consideração da NLF.

Por estes motivos, procedimentos têm sido estabelecidos visando simplificações, basicamente separando a análise da estrutura em “análise global” (item 6.3), da estrutura toda, seguida de “análise local” (item 6.4), como complementação, para cada elemento isoladamente. Na análise global considera-se a NLG e aproxima-se a NLF através de linearização da rigidez. Na análise local consideram-se os esforços nodais das extremidades dos elementos obtidos na análise global, levando em conta a NLF e NLG.

A NBR 6118 (2003) permite essas simplificações referidas para análise de 2ª ordem global, as quais são aqui descritas valendo-se dos fundamentos da análise NLG apresentada nos capítulos anteriores.

Também, são apresentados no item 6.3.2, critérios simples para a verificação da possibilidade da dispensa da análise global de 2ª ordem, seguindo as recomendações da NBR 6118 (2003).

6.1 Método geral para análise não linear geométrica e material não linear

Neste caso, considerando material não linear, os fundamentos do método são inteiramente semelhantes ao descrito para material linear no item 5.1.1, notando-se que, no caso, em cada etapa correspondente a um incremento de carga, os deslocamentos devem ser calculados por procedimento que leve em conta a não linearidade física. Por exemplo, utilizando-se o diagrama momento x curvatura

relativa à seção analisada e integrando-se o diagrama de curvaturas, conforme a equação 2, ou seja,

$$\frac{1}{r} = \frac{d^2 y}{d^2 x}$$

obtendo-se o campo de deslocamento y .

Para barras isostáticas retas, esta integração pode ser feita através da analogia de Mohr, ou seja, considerando o diagrama de curvaturas como carga fictícia aplicada à denominada viga auxiliar [FUSCO (1981)].

6.2 Identificação de instabilidade por ponto limite

Havendo recursos para a solução do problema, considerando a NLG e NLF, do ponto de vista conceitual pode-se verificar a possibilidade de ocorrência de instabilidade por ponto limite, como a seguir se descreve.

Conforme visto no item 4.2.2 (Figura 6.b), a característica fundamental da instabilidade por ponto limite é o surgimento de ponto de máximo relativo da carga.

Assim, para a identificação de instabilidade por ponto limite, o carregamento é aplicado de forma progressiva, a partir do zero (estrutura descarregada), em certo número de etapas suficiente para se identificar o carregamento crítico.

Considerando-se as várias iterações da análise NLG descrita no item anterior, monta-se a curva “solicitação x resposta” (Figura 14) —semelhante à Figura 13 do item anterior— onde se procura identificar a ocorrência de ponto de máximo relativo da solicitação, ou seja, tangente nula, $dP/dy = 0$, onde P é a carga de compressão e y o deslocamento considerado. Essa condição caracteriza instabilidade, pois, na prática pequeno aumento de carga resulta em deformações muito grandes.

Deve-se notar que o ELU de instabilidade somente ocorre se não houver antes ruptura por esgotamento da capacidade resistente de seções da estrutura (ELU de resistência), como está ilustrado na Figura 14.

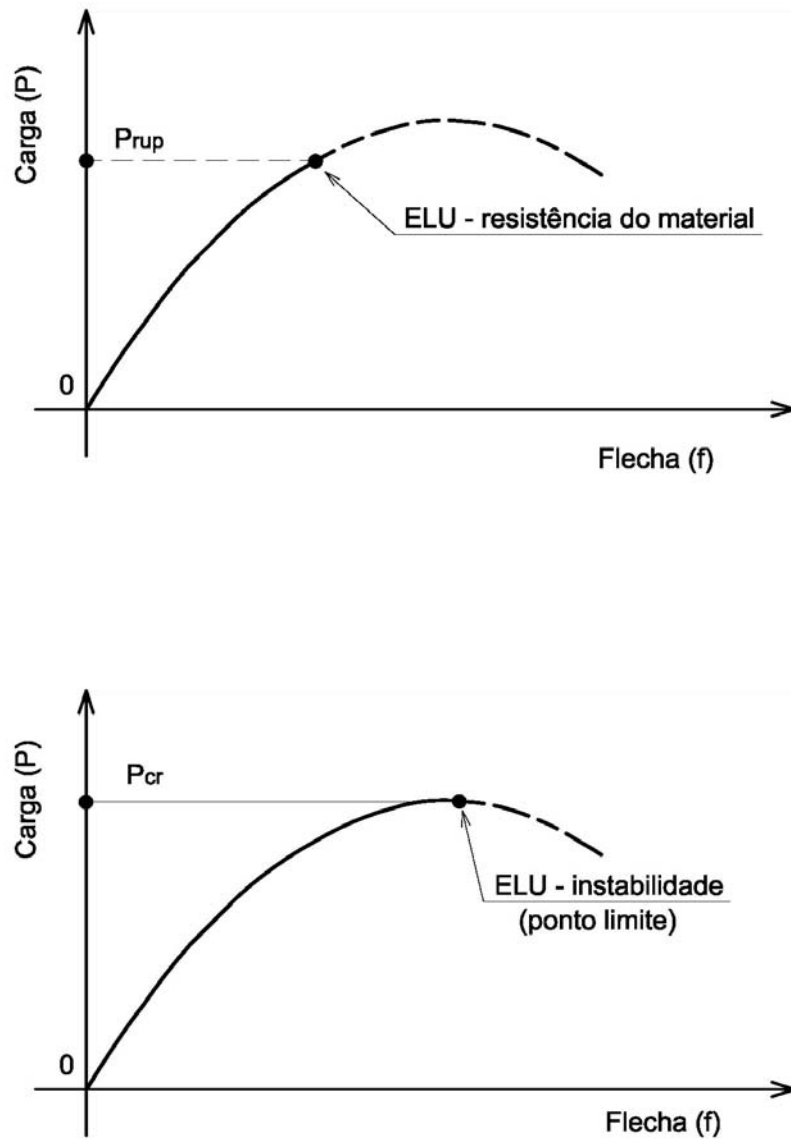


Figura 14

ELU de resistência do material e de instabilidade

6.3 Análise global de edifícios de concreto armado

6.3.1 Mobilidade de estruturas (nós fixos ou móveis)

Neste item, caracterizam-se as estruturas de concreto armado de edifícios, no que diz respeito a efeitos de 2ª ordem, definindo-as como estruturas de nós fixos ou de nós móveis, seguindo a NBR 6118 (2003).

As estruturas são ditas de nós fixos quando os deslocamentos horizontais dos nós são pequenos, de forma que os efeitos globais de 2ª ordem —sendo inferiores a 10% dos respectivos esforços de 1ª ordem— podem ser desprezados. Nesse caso, a análise global pode ser feita pela teoria linear, bastando considerar os demais efeitos de 2ª ordem (locais e localizados) recomendados pela norma.

Em contraposição, as estruturas são ditas de nós móveis quando os deslocamentos horizontais dos nós não são pequenos, de forma que os efeitos globais de 2ª ordem —sendo superiores a 10% dos respectivos esforços de 1ª ordem— não podem ser desprezados. Nesse caso, deve-se considerar todos os efeitos de 2ª ordem (global, locais e localizados) recomendados pela norma.

A análise dos efeitos globais de 2ª ordem de estruturas de nós móveis é abordada nos itens seguintes.

6.3.2 Avaliação da mobilidade da estrutura através de processos simplificados

A NBR 6118 (2003) permite o uso de processos aproximados, através dos coeficientes α [parâmetro de instabilidade] e γ_z [coeficiente de majoração dos esforços finais globais de 1ª ordem para obtenção dos finais de 2ª ordem] que podem ser utilizados para verificar a mobilidade de estruturas (nós fixos ou móveis), e portanto a possibilidade de dispensa da análise dos esforços globais de 2ª ordem.

A seguir, descreve-se apenas o uso do coeficiente γ_z , já que é o mais empregado na prática, seguindo as recomendações da NBR 6118 (2003).

O coeficiente γ_z é válido para edifícios de no mínimo 4 andares e pode ser determinado através dos resultados de análise de 1ª ordem, adotando valores de rigidez descritos no item 6.3.3, para cada combinação de carregamento considerado, da seguinte forma:

$$\gamma_z = \frac{1}{1 - \frac{\Delta M_{\text{tot,d}}}{M_{1,\text{tot,d}}}} \quad (49)$$

onde

- $M_{1,\text{tot,d}}$ é o momento de tombamento, ou seja, a soma dos momentos de todas as forças horizontais da combinação considerada com seus valores de cálculo, em relação à base da estrutura;
- $\Delta M_{\text{tot,d}}$ é soma dos produtos de todas as forças verticais atuantes na estrutura, na combinação considerada, com seus valores de cálculo, pelos deslocamentos horizontais de seus respectivos pontos de aplicação, obtidos da análise de 1ª ordem.

Se γ_z calculado for menor que 1,10 a estrutura será considerada de nós fixos, ou seja, os esforços globais podem ser calculados através de análise de 1ª ordem. Caso contrário, será considerada de nós móveis e podem ser analisadas conforme o item seguinte.

6.3.3 Análise global de estruturas de nós móveis

Na análise global de estruturas de nós móveis, devem ser considerados obrigatoriamente os efeitos da NLG e NLF.

Quanto a NLG, a NBR 6118 (2003) permite cálculo simplificado para o caso de se ter γ_z menor ou igual a 1,30, realizando-se análise linear considerando majoração dos esforços horizontais da combinação de carregamento por $0,95\gamma_z$. Para valores de γ_z maiores que 1,30, a análise global deve considerar de forma rigorosa a NLG, se bem que alguns autores não recomendam esta condição [PINTO (1997, 2002)], pois a estrutura será consideravelmente flexível e poderá apresentar problemas em sua utilização, como por exemplo desconforto devido a vibrações induzidas pelo vento. De qualquer modo, nesses casos, é recomendável a execução de análises complementares quanto ao ELS, tendo em vista o aumento de flexibilidade referido.

Quanto a NLF, como o deslocamento lateral da estrutura global depende da rigidez de todos os membros da estrutura, pode-se proceder, como aproximação, a uma análise linear considerando valor da rigidez EI que represente a média das

rigidezes do conjunto dos elementos componentes, conforme sugerido por vários autores, incluindo MACGREGOR (1993).

Nesta linha de proposição, a NBR 6118 (2003) permite adotar simplificação na análise global de 2ª ordem de estruturas reticuladas com no mínimo 4 andares, em termos de linearização das rigidezes dos elementos componentes, da seguinte forma:

$$\text{lajes:} \quad (EI)_{\text{sec}} = 0,3 E_{\text{ci}} I_{\text{c}}, \quad (50)$$

$$\text{vigas:} \quad (EI)_{\text{sec}} = 0,4 E_{\text{ci}} I_{\text{c}}, \text{ para } A_s \neq A_s', \quad (51)$$

$$(EI)_{\text{sec}} = 0,5 E_{\text{ci}} I_{\text{c}}, \text{ para } A_s = A_s', \quad (52)$$

$$\text{pilares:} \quad (EI)_{\text{sec}} = 0,8 E_{\text{ci}} I_{\text{c}} \quad (53)$$

onde, E_{ci} é o módulo de elasticidade tangente inicial, I_{c} é o momento de inércia da seção bruta de concreto, incluindo, quando for o caso, as mesas colaborantes e A_s e A_s' são as áreas das armaduras longitudinais de compressão e de tração, respectivamente.

Além disso, quando a estrutura de contraventamento for composta exclusivamente por vigas e pilares e γ_z for menor que 1,30, é permitido o cálculo da rigidez das vigas e pilares por

$$(EI)_{\text{sec}} = 0,7 E_{\text{ci}} I_{\text{c}} \quad (54)$$

Note-se que a simplificação da NLF é restrita à análise global, não sendo permitida para a análise local.

6.3.4 Resumo dos casos de análise global

Apresenta-se na tabela abaixo um resumo dos casos de análise global em estruturas de edifícios descritos neste capítulo 6, para estruturas de concreto armado, seguindo-se as especificações da NBR 6118 (2003).

Tabela 3 - Resumo dos casos de análise de efeitos globais em estruturas de edifício

γ_z	Classificação da estrutura (mobilidade)	NLG	NLF
$\leq 1,1$	Nós fixos	Análise NLG dispensada Análise LG	Análise NLF aproximada: Análise LF, com rigidez reduzida ⁽¹⁾
$>1,1$ e $\leq 1,3$	Nós móveis	Análise NLG aproximada: Análise LG, com esforços horizontais majorados por $0,95\gamma_z$	Análise NLF aproximada: Análise LF, com rigidez reduzida ⁽¹⁾
$>1,3$ ⁽²⁾	Nós móveis	Análise NLG rigorosa	Análise NLF aproximada: Análise LF, com rigidez reduzida ⁽¹⁾

⁽¹⁾ rigidez reduzida de acordo com o item 6.3.3.

⁽²⁾ não recomendado, segundo alguns autores.

Em resumo, todos os casos referidos na tabela acima, considerando as simplificações permitidas pela norma, recaem em análises com LF considerando linearização da rigidez. Ao mesmo tempo, quanto a NLG, para $\gamma_z \leq 1,10$ permite-se empregar análise LG puramente; para $1,10 < \gamma_z \leq 1,30$ usar análise LG com esforços horizontais majorados por $0,95\gamma_z$; para $\gamma_z > 1,30$ proceder à análise NLG rigorosa.

6.4 Análise de pilares isolados. Método do pilar padrão

Da análise global da estrutura, descrita no item anterior, utilizam-se os esforços obtidos nas extremidades das barras na análise dos efeitos locais de 2ª ordem, caso essa análise não seja dispensada em função do índice de esbeltez λ , conforme recomendações da NBR 6118 (2003).

Assim, os elementos isolados devem ser retirados da estrutura global, considerando seu comprimento de flambagem L_e , e aplicando-se em suas extremidades os esforços obtidos na análise global de 2ª ordem.

Vários métodos rigorosos e aproximados são citados pela NBR 6118 (2003), como o método geral (rigoroso, segundo procedimento descrito no item 6.1), obrigatório para $\lambda > 140$. Este processo, levando em conta a não linearidade física e geométrica, é bastante trabalhoso, motivo porque foram desenvolvidos métodos aproximados como do pilar padrão, válidos para $\lambda \leq 90$, em diversas variantes (curvatura aproximada, rigidez aproximada, etc). Existem outros processos simplificados, como os descritos por FUSCO (1981).

A seguir são abordados os fundamentos básicos do método pilar padrão, para análise de estabilidade de pilares isolados de concreto armado, conforme descrito pelo CEB (1978), FUSCO (1981), notando-se que este método decorre de considerações descritas em itens anteriores, como a linearização do momento externo (item 4.3), verificação de estabilidade equilíbrio (item 4.4), etc.

Trata-se de, em pilar em balanço de concreto armado submetido à carga excêntrica (Figura 1), determinar graficamente a carga crítica (momento crítico) associada à instabilidade por ponto limite, na base do pilar ($x=0$). Assim, todas as grandezas envolvidas na análise, momentos e curvatura, são referidos à base do pilar.

O pilar padrão é definido, de modo geral, conforme o CEB (1978), por:

- pilar em balanço, com seção transversal constante;
- solitação por cargas (axiais ou excêntricas) paralelas ao eixo e , se for o caso, cargas laterais (concentradas ou distribuídas) e momento no topo;
- relação da flecha de 2ª ordem δ no topo e curvatura $1/r(x=0)$ na base da barra, de modo aproximado, dada por

$$\delta = k \frac{1}{r(0)} \quad (55)$$

sendo,

$$k = \frac{L^2 e}{10} \quad (56)$$

Observe-se que esta expressão deriva diretamente da adoção da equação simplificada da curvatura e da hipótese de variação senoidal para a linha elástica de 2ª ordem, conforme a equação 28 do item 4.3.1a, ou seja,

$$y(x) = \delta - \left(\frac{L_e}{\pi}\right)^2 \frac{1}{r(x)} \quad (57)$$

Nessa equação considerando-se que $y(0) = 0$, tem-se

$$y(0) = \delta - \left(\frac{L_e}{\pi}\right)^2 \frac{1}{r(0)} = 0 \quad (58)$$

De onde, fazendo a aproximação $\pi^2 \cong 10$, resulta a expressão 55.

Para o pilar em balanço da Figura 1, onde a carga de compressão excêntrica P é aplicada no topo do pilar, tem-se, conforme descrito no item 3.2, que o momento externo total M_e é composto de M_1 (momento de 1ª ordem) e M_2 (momento de 2ª ordem),

$$M_e = M_1 + M_2 \quad (59)$$

Da Figura 1.b, resulta

$$M_2 = P\delta \quad (60)$$

Fazendo uso da equação 55, obtém-se

$$M_2 = Pk \frac{1}{r(0)} \quad (61)$$

ou seja, o momento de 2ª ordem M_2 é linear com a curvatura da seção da base $1/r(0)$. Note-se que esta equação é a mesma equação 31, deduzida no item 4.3.1a, especificada para $x=0$.

Como há equilíbrio,

$$M_i = M_e = M_1 + M_2 = M_1 + Pk \frac{1}{r(0)} \quad (62)$$

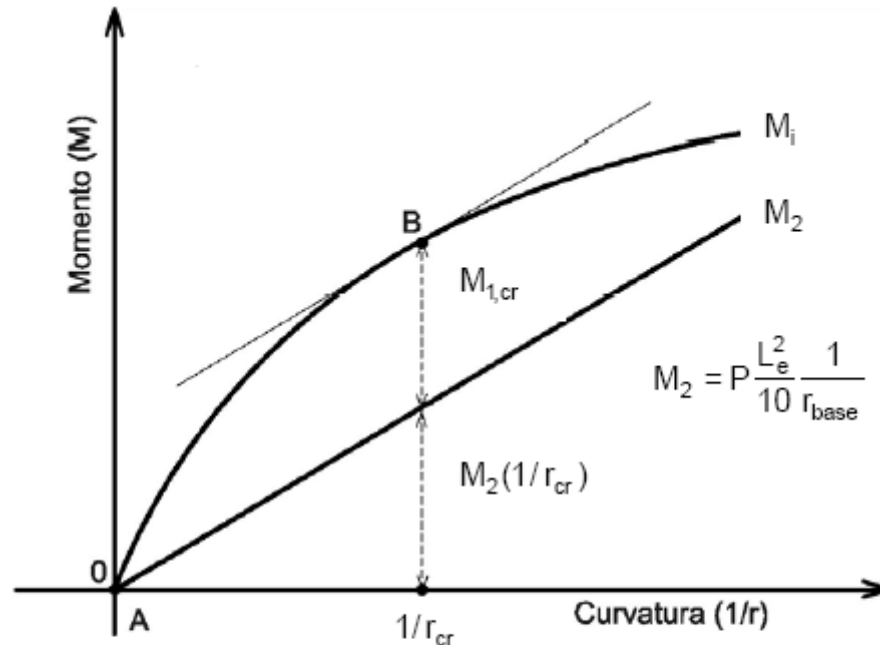
de onde resulta

$$M_1 = M_i - Pk \frac{1}{r(0)} \quad (63)$$

Considere-se na Figura 15 a curva do momento interno x curvatura (adotando força normal $N = P$, constante) e a curva do momento de 2ª ordem M_2 segundo a expressão 61, para a seção transversal da base do pilar.

Para o prosseguimento da análise de instabilidade por ponto limite, a questão é determinar a curva do momento externo M_e , associada à carga crítica ($P=P_{cr}$),

conhecendo-se de partida as curvas do momento interno M_i e do momento de 2ª ordem M_2 , e assim definir o ponto em que ocorre instabilidade.



$$M_{1,cr} = M_i(1/r_{cr}) - P \frac{L_e^2}{10} \frac{1}{r_{cr}}$$

Figura 15
Instabilidade de pilar de concreto armado
Método do pilar padrão – Momento de 1ª ordem crítico

Com base na Figura 12 (para compressão excêntrica em regime não linear), por analogia, e considerando que M_1 é constante, é possível determinar a curva do momento externo M_e para a carga crítica, traçando uma reta paralela à curva de M_2 e tangente à curva de M_i . O ponto B de tangência (Figura 15) define o ponto em que ocorre instabilidade, ponto B de coordenadas (curvatura crítica ($1/r_{cr}$); momento externo crítico ($M_{e,cr}$), que correspondente ao momento de 1ª ordem crítico associado, ou seja,

$$M_{1,cr} = [M_i]_{1/r_{cr}} - Pk \frac{1}{r_{cr}(0)} \quad (64)$$

ou seja,

$$M_{1,cr} = [M_i]_{1/r_{cr}} - P \frac{L_e^2}{10} \frac{1}{r_{cr}(0)} \quad (65)$$

Note-se que para a determinação dos efeitos de 2ª ordem, com a linearização adotada para M_2 , foi dispensado o processo iterativo e a integração da distribuição das curvaturas ao longo do eixo do pilar, para a determinação dos deslocamentos de 2ª ordem, previstos pela análise rigorosa não linear.

A expressão senoidal adotada para a linha elástica de 2ª ordem, conforme já referido no item 4.3.1a, corresponde à solução exata se a barra tiver seção transversal constante e não houver cargas transversais aplicadas ao longo do pilar. Em caso contrário, uma correção deve ser introduzida, por exemplo seguindo o “processo do pilar padrão corrigido” [FUSCO (1981)].

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS E CONCLUSÕES

A importância do tema aqui abordado, sob o ponto de vista formal e histórico, e o interesse do meio técnico em geral suscitado pelo tratamento abrangente dado pela norma NBR 6118 (2003) ao seu capítulo 15 (“Instabilidade e efeitos de 2ª ordem”), constituíram-se na motivação básica do presente estudo.

Assim, este trabalho faz uma revisão de conceitos básicos relativos a efeitos de 2ª ordem e a estabilidade de estruturas. Foram considerados regime elástico linear, como referência e para melhor entendimento da teoria e sua evolução ao longo do tempo, e também regime não linear, visando prover fundamentos sobre instabilidade por bifurcação de equilíbrio e por ponto limite, com e sem inversão da configuração geométrica, descritos pela norma NBR 6118 (2003).

Também, o propósito do trabalho foi, além de reunir os conceitos básicos sobre instabilidade estrutural, abordar algumas questões, nem sempre tratadas de maneira uniforme na literatura disponível.

Por exemplo, citam-se os comentários e esclarecimentos adicionais seguintes que decorrem do estudo aqui descrito, acerca do conceito de estabilidade de estruturas de concreto armado descrito pela NBR 6118 (2003) no item 15.2-c (“Campo de aplicação e conceitos fundamentais”):

“Em estruturas de material de comportamento não linear, com imperfeições geométricas iniciais, não há perda de estabilidade por bifurcação do equilíbrio, podendo, no entanto, haver perda de estabilidade quando, ao crescer a intensidade do carregamento, o aumento da capacidade resistente da estrutura passa a ser menor do que o aumento da solicitação (ponto limite sem reversão)”.

Comentários:

- Como menciona a norma, a instabilidade de um pilar de concreto armado ocorre por ponto limite e não por bifurcação de equilíbrio (flambagem). Isto se deve à existência de excentricidade da carga compressão e ao mesmo tempo da não linearidade do material (Figura 6.b). Recorde-se que compressão excêntrica e linearidade do material não possibilitam ocorrência de instabilidade (Figura 4.b). Contudo, ainda que teoricamente, em pilar ideal esbelto de concreto armado solicitado à compressão axial poderá ocorrer flambagem (Figura 6.a). Para o caso de material não linear, conceitualmente, os dois fenômenos estão relacionados entre si, ou seja, para excentricidade

tendendo a zero, o ponto limite tende ao ponto de bifurcação de equilíbrio (Figura 6.c).

- Segundo o texto da norma, pode “... *haver perda de estabilidade quando, ao crescer a intensidade do carregamento (momento externo M_e), o aumento da capacidade resistente da estrutura (momento interno M_i) passa a ser menor do que o aumento da solicitação...*”

Na realidade, a instabilidade ocorre quando se atinge o ponto limite (Figura 12: ponto limite C, para a carga P_{cr}), onde há igualdade dos momentos externo M_e e interno M_i , porém em equilíbrio instável. Atingida a carga P_{cr} , no ponto limite C (quando já está caracterizado o ELU de instabilidade), é possível reduzir a carga de forma controlada, em trajetória de equilíbrio instável, mas sempre com aumento da flecha [na Figura 12: trecho tracejado CB da curva Carga (P) x Flecha (f)], ou aumentar a carga, quando não haverá possibilidade de equilíbrio [na Figura 12: a curva $M_e(P_3 > P_{cr})$ x Curvatura ($1/r$) não intercepta a curva M_i x Curvatura ($1/r$)].

Dessa forma, a descrição de instabilidade pela norma não define claramente o ponto limite. Além disso, menor aumento de capacidade resistente (momento interno M_i) que o aumento de solicitação (momento externo M_e) também se aplica, de forma geral, ao conceito de esgotamento da capacidade resistente do material, portanto a descrição não é suficiente para a distinção de instabilidade.

- O termo “reversão” no contexto de instabilidade estrutural pode ser referido à reversão (posição oposta à normal) da configuração geométrica, ou à reversão (redução) controlada da carga a partir do ponto limite (ponto B, na Figura 12), em equilíbrio instável, porém com aumento de flecha. Pela possível ambigüidade que o termo “reversão” possa causar, é interessante fazer distinção entre os dois casos. Assim, neste trabalho, no caso citado pela norma, optou-se por empregar a designação “ponto limite com (ou sem) inversão de configuração geométrica”.

Nesta dissertação foram também mencionadas simplificações empregadas na prática de projeto, já que análises considerando rigorosamente a não linearidade física e geométrica são extremamente complexas e trabalhosas. Assim, relativo a estruturas reticuladas de concreto armado, foram descritos resumidamente o uso do parâmetro γ_z , para verificação da necessidade do emprego de análise de 2ª ordem; a

linearização do comportamento do material, para a verificação de estabilidade global da estrutura; a linearização da variação do momento externo em função da curvatura, etc.

Embora essas simplificações referidas sejam extremamente úteis e de fácil uso na prática, a adequada decisão de sua aplicação pressupõe o entendimento dos fundamentos teóricos envolvidos, incluindo os relativos a efeitos de 2ª ordem e a instabilidade da estrutura.

REFERÊNCIAS

ABNT – Associação Brasileira de Normas Técnicas. NBR6118: Projeto de estruturas de concreto – Procedimento. Rio de Janeiro, 2003.

CEB-FIP – Comité Euro-International du Beton, Manual of buckling and instability, Bulletin d'information n° 123, 1978.

CEB-FIP – Comité Euro-International du Beton, Model Code 90, Bulletin d'information n° 213, 214, 1993.

CLOUGH R.W., PENZIEN J., Dynamics of structures, McGraw-Hill Book Company, United States, 1975.

COLLINS, M. P., MITCHELL, D., Prestressed Concrete Basics, Canadian Prestressed Concrete Institute, Canada, 1987.

FRANÇA, R.L.S., Contribuição ao estudo dos efeitos de 2ª ordem em pilares de concreto armado. Tese (Doutoramento). Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 1991.

FRANCO, M., Problemas de estabilidade nos edifícios de concreto armado. Reunião anual. IBRACON, 1985. Coletânea de trabalhos sobre estabilidade global e local das estruturas de edifícios – Instituto de Engenharia. São Paulo, 1997.

FRANCO, M., Problemas de estabilidade nos edifícios de concreto armado. São Paulo; 1985 . [Coletânea de trabalhos sobre estabilidade global e local das estruturas de edifícios – Instituto de Engenharia], 1997.

FRANCO, M., VASCONCELOS, A.C., Avaliação Prática dos efeitos de 2ª ordem em edifícios altos. Colloquium on the CEB-FIP Model Code 1990. Rio de Janeiro, 1991. Coletânea de trabalhos sobre estabilidade global e local das estruturas de edifícios – Instituto de Engenharia. São Paulo, 1997.

FRANCO, M., Instabilidade local e global dos edifícios altos de concreto armado. Symposium of the International Association for Shell and Spatial Structures. Milão, 1995. Coletânea de trabalhos sobre estabilidade global e local das estruturas de edifícios – Instituto de Engenharia. São Paulo, 1997.

FUSCO, P. B., Estruturas de concreto armado: Solicitações normais. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1981.

GALLAGHER, R.H., Finite Element Analysis fundamentals, United States, 1975.

MACGREGOR, J.G., Design of slender concrete columns – Revisited. ACI Structural Journal. V.90, No. 3, May-June, 1993.

OLIVEIRA, P. H. S., Processo aproximado para a consideração da não-linearidade física de pilares em concreto armado. 2004, 125p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2004.

PINTO, R. S., Não-linearidade física e geométrica no projeto de edifícios usuais de concreto armado. 1997, 108p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Escola de Engenharia de São Carlos. São Carlos:USP, 1997.

PINTO, R. S., Análise não-linear das estruturas de contraventamento de edifícios em concreto armado. 2002, 189p.. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos. São Carlos:USP, 2002.

RATZERDORSFER, J., Flambagem – I. Barras prismáticas, Instituto de Pesquisas Tecnológicas – IPT, São Paulo, 1954.

RATZERDORSFER, J., Flambagem – II. Flexão composta, Instituto de Pesquisas Tecnológicas – IPT, São Paulo, 1955.

SOUZA LIMA, V.M., VENANCIO LIMA, F., A noção de rigidez tangente no estudo da não linearidade geométrica de estruturas reticuladas, 5º Congresso Latino-Americano de Métodos Computacionais em Engenharia, Salvador, 1984.

TIMOSHENKO, S. T., Resistência dos materiais. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico Ltda., Vols. 1 e 2, 1960.

TIMOSHENKO, S. T., Theory of elastic stability. McGraw-Hill Book Company, Tokyo, 1961.

VASCONCELOS, A.C., Origem dos parâmetros de estabilidade α e γ_z . Coletânea de trabalhos sobre estabilidade global e local das estruturas de edifícios – Instituto de Engenharia. São Paulo, 1997.

ZAGOTTIS, D. L., Introdução à teoria de estruturas – Cap. 10: Estabilidade e instabilidade do equilíbrio de estruturas, Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações, USP, 1980.

ZIEGLER, H., Principles of structural stability, Blaisdell Publishing Company, United States, 1968.

ZIENCKIEWICZ, O. C., The Finite Element Method in Engineering Science, McGraw Hill, United States, 1971.